

MEMENTO

MATEMATIKA

Pregled elementarnih sadržaja od 5. - 8. razreda



ALGEBRA

PRIRODNI BROJEVI

Brojevi koje susrećemo od najranijeg djetinjstva i pomoću kojih rješavamo razne zadatke i probleme iz svakodnevnog života, **PRIRODNI SU BROJEVI**.

Skup svih prirodnih brojeva označavamo s

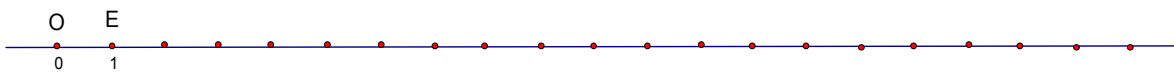
$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Skup prirodnih brojeva s nulom označavamo s

$$N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$$

Zbroj i umnožak dva prirodna broja je uvijek prirodan broj.

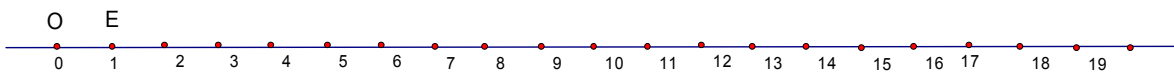
Brojevni pravac



O - ishodište

E - jedinična točka

\overline{OE} - jedinična dužina



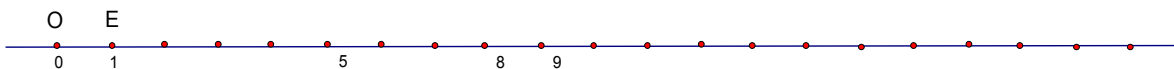
Ovim postupkom svaki broj skupa N_0 pridružujemo tačno jednoj točki pravca. Pravac kojim smo na taj način pridružili brojeve nazivamo BROJEVNI PRAVAC.

Pr.1. Točkama pravca pridruži brojeve: a) 5, 8, 9

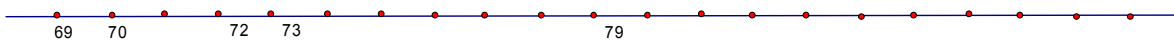
b) 72, 73, 79

c) 300, 500, 700

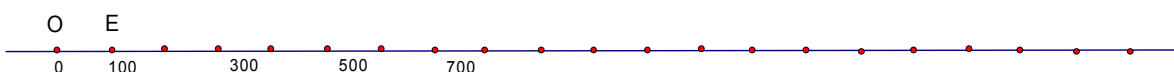
a)



b)



c)



Zbrajati možemo :

1. Usmeno

$$500 + 400 = 900$$

2. Pismeno

a) u stupcu

$$773 + 1248 = 2021$$

$$\begin{array}{r} 773 \\ + 1248 \\ \hline 2021 \end{array}$$

b) u retku

$$852 + 3921 = 4773$$

Osnovna svojstva zbrajanja

1. svojstvo **KOMUTATIVNOSTI**

Zamijenimo li mjesta pribrojnika, zbroj se neće promijeniti.

$$\mathbf{a + b = b + a}$$

Primjer: $4 + 5 = 5 + 4 = 9$

2. svojstvo **ASOCIJATIVNOSTI**

Promijenimo li redoslijed zbrajanja više pribrojnika , zbroj se neće promijeniti.

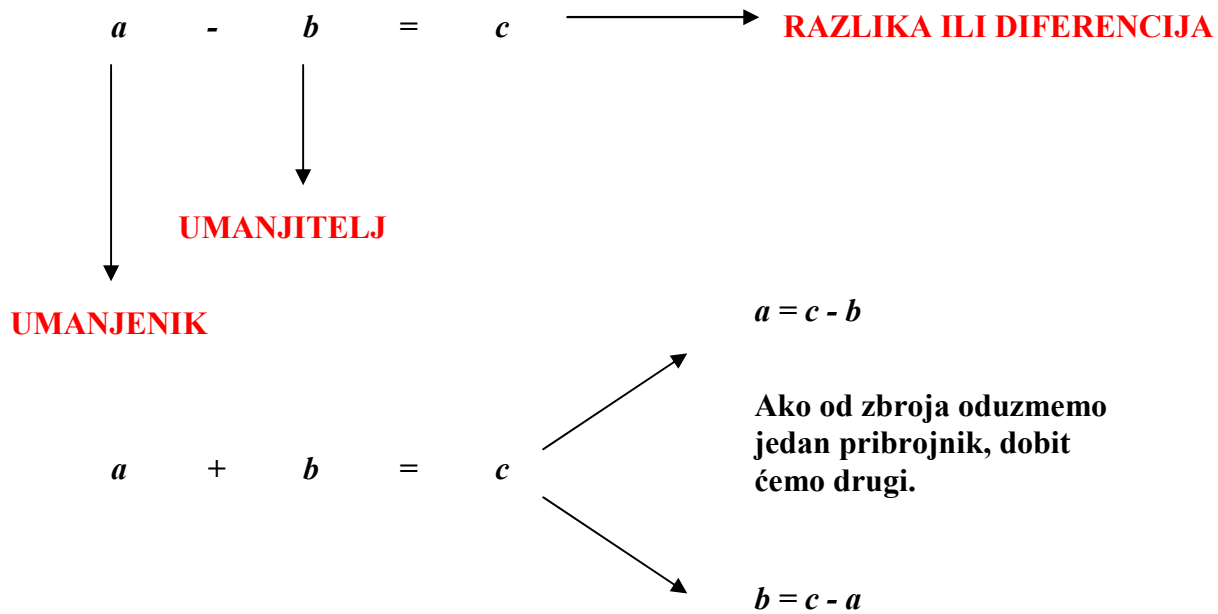
$$\mathbf{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$$

Primjer: $2 + 3 + 4 = (2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4) = 9$

Primjer: Izračunaj

$$\begin{aligned} 39 + 54 + 46 + 61 + 24 &= \\ &= (39 + 61) + (54 + 46) + 24 = \\ &= 100 + 100 + 24 = \\ &= 224 \end{aligned}$$

Oduzimanje prirodnih brojeva



ODUZIMATI MOŽEMO:

a) usmeno:

$$330 - 30 = 300$$

b) pismeno:

1. u stupcu

$$\begin{array}{r} 3621 \\ -879 \\ \hline 2742 \end{array}$$

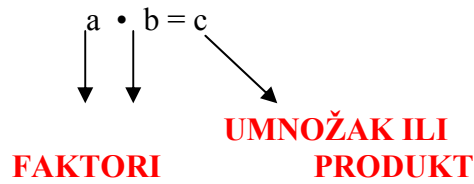
2. u retku

$$\overset{\cdot}{1}\overset{\cdot}{0}\overset{\cdot}{8}\overset{\cdot}{2} - \overset{\cdot}{3}\overset{\cdot}{9}\overset{\cdot}{9} = 683$$

Množenje prirodnih brojeva

Množenje je skraćeni zapis zbrajanja jednakih pribrojnika.

Primjer: $5 \cdot 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7$



Umnožak bilo kojeg prirodnog broja i broja 0 jest 0.

$$n \cdot 0 = 0$$

Umnožak bilo kojeg prirodnog broja i broja 1 jest sam taj broj.

$$n \cdot 1 = n$$

Umnožak broja 0 s brojem 0 jest 0.

$$0 \cdot 0 = 0$$

Primjer: a) $253 \cdot 48 = 12\,144$

b) $555 \cdot 1 = 555$

$$\begin{array}{r} \underline{253 \cdot 48} \\ 1012 \\ + \underline{2024} \\ 12144 \end{array}$$

c) $293 \cdot 0 = 0$

Osnovna svojstva množenja:

1. svojstvo **KOMUTATIVNOSTI**

Ako faktori zamijene mjesto, umnožak se neće promijeniti.

$$a \cdot b = b \cdot a \quad , \quad a, b \in \mathbb{N}$$

Primjer: $3 \cdot 7 = 7 \cdot 3 = 21$

2. svojstvo **ASOCIJATIVNOSTI**

Promijenimo li redoslijed množenja više faktora, umnožak se neće promijeniti.

$$a \cdot b \cdot c = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

Primjer:

$$\begin{aligned} 3 \cdot (2 \cdot 5) &= 3 \cdot 10 = 30 \\ (3 \cdot 2) \cdot 5 &= 6 \cdot 5 = 30 \\ 3 \cdot 2 \cdot 5 &= 6 \cdot 5 = 30 \end{aligned}$$

3. svojstvo **DISTRIBUTIVNOSTI**

a) Svojstvo distributivnosti množenja prema zbrajanju

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

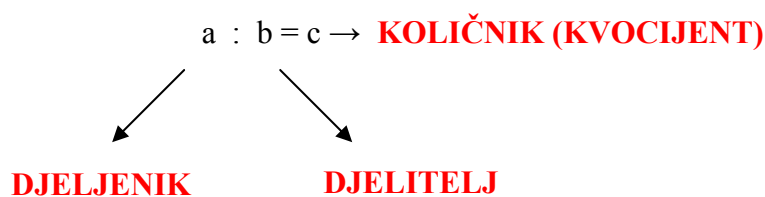
b) Svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju

$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c, \quad a, b, c \in \mathbb{N}$$

Primjer:

a)	$7 \cdot 450 + 93 \cdot 450 =$	b)	$6 \cdot 340 + 94 \cdot 340 =$
	$= (7 + 93) \cdot 450 =$		$= (6 + 94) \cdot 340 =$
	$= 100 \cdot 450 =$		$= 100 \cdot 340 =$
	$= 45000$		$= 34000$
c)	$5 \cdot 24 \cdot 2 \cdot 25 \cdot 4 =$		
	$= (5 \cdot 2) \cdot (25 \cdot 4) \cdot 24 =$		
	$= 10 \cdot 100 \cdot 24 =$		
	$= 24000$		

Dijeljenje prirodnih brojeva



$$\begin{aligned} a \cdot b = c &\Rightarrow c : b = a \\ &\Rightarrow c : a = b \end{aligned}$$

Ako se umnožak dvaju prirodnih brojeva podijeli jednim od faktora, dobije se drugi faktor.

Za svaki prirodni broj vrijedi:

1. $a : 1 = a$ $14 : 1 = 14$
2. $a : a = 1$ $25 : 25 = 1$
3. $0 : a = 0$ $0 : 41 = 0$
4. S nulom ne možemo dijeliti !

Dijeliti možemo:

1. usmeno

2. pismeno

$$40 : 5 = 8$$

$$88 : 11 = 8$$

$$500 : 100 = 5$$

$$220 : 5 = 44$$

$$20$$

$$0$$

$$729 : 3 = 243$$

$$12$$

$$09$$

$$0$$

Redoslijed izvođenja računskih radnji

Za zbrajanje i oduzimanje kažemo da su računске radnje istog stupnja.

Isto tako su množenje i dijeljenje računске radnje istog stupnja.

U izrazu bez zagrada računске radnje istog stupnja rješavamo redom, slijeva udesno.

Primjer:

$$\begin{aligned} 240 + 56 - 38 + 41 &= \\ &= 296 - 38 + 41 = \\ &= 258 + 41 = \\ &= 299 \end{aligned}$$

Primjer:

$$\begin{aligned} 6 \cdot 8 : 4 \cdot 10 : 5 &= \\ &= 48 : 4 \cdot 10 : 5 = \\ &= 12 \cdot 10 : 5 = \\ &= 120 : 5 = \\ &= 24 \end{aligned}$$

Ako je u zadatku zadano više računskih radnji koje nisu istog stupnja, prvo ćemo izvršiti množenje i dijeljenje, a zatim zbrajanje i oduzimanje.

Primjer:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 5 - 10 + 9 : 3 - 1 &= \\ &= 15 - 10 + 3 - 1 = \\ &= 5 + 2 = \\ &= 7 \end{aligned}$$

Ukoliko su se u brojevnom izrazu pojavile zagrade:

1. Najprije izračunamo brojevni izraz unutar zagrada, od unutarnjih zagrada prema vanjskim.
2. Izračunavamo množenje i dijeljenje, kako slijede, redom, slijeva udesno.
3. Izračunavamo zbrajanje i oduzimanje, kako slijede, redom, slijeva udesno.
4. Prepisujemo sve što nismo izračunali.

Primjer:

$$\begin{aligned}
 & (3 \cdot 9 - 7) : 5 + 1 = \\
 & = (27 - 7) : 5 + 1 = \\
 & = 20 : 5 + 1 = \\
 & = 4 + 1 = \\
 & = 5
 \end{aligned}$$

Višekratnik i djelitelj

Višekratnik nekog prirodnog broja je broj koji je djeljiv tim brojem.

Svaki broj je sam sebi višekratnik.

Svaki broj ima beskonačno mnogo višekratnika.

Primjer: Navedi sve višekratnike broja 8.

8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72...

Prirodni broj djeljiv je drugim prirodnim brojem samo ako podijeljen njime daje količnik koji je prirodni broj, s ostatkom 0.

Djelitelji nekog broja su oni brojevi s kojima je on djeljiv.

Broj može biti djeljiv samo s brojevima koji nisu veći od njega.

Najmanji djelitelj svakog prirodnog broja je broj 1.

Najveći djelitelj svakog prirodnog broja je sam taj broj.

Svaki broj ima konačno mnogo djelitelja.

Primjer: Je li broj 72 djelitelj broja 936 ?

$$\begin{array}{r}
 936 : 72 = 13 \\
 216 \\
 0
 \end{array}$$

Broj 72 je djelitelj broja 936.

Primjer: Navedi sve djelitelje broja 6.
Djelitelji broja 6 su: 1, 2, 3 i 6.

Djeljivost s 10, 5, 2, 3 i 9

Pravilo o djeljivosti s 10: Prirodni broj je djeljiv s 10 ako mu je znamenka jedinica 0.

Pravilo o djeljivosti s 5: Prirodni broj je djeljiv s 5 ako mu je znamenka jedinica 0 ili 5.

Pravilo o djeljivosti s 2: Prirodni broj je djeljiv s 2 ako mu je znamenka jedinica 0, 2, 4, 6 ili 8.

Pravilo o djeljivosti s 3: Prirodni broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 3.

Pravilo o djeljivosti s 9: Prirodni broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

Primjer: Koji su od brojeva: 122, 195, 1 008, 1 866, 4 050, 8 118, 11 010, 33 333, 10 101 011 djeljivi:

a) s 2

b) s 3

c) s 5

d) s 9

e) s 10

a) 122

b) 195

c) 195

d) 1 008

e) 4 050

1 008

1 008

4 050

4 050

11 010

1 866

1 866

11 010

8 118

4 050

4 050

8 118

8 118

11 010

11 010

33 333

Djeljivost zbroja i umnoška

- DJELJIVOST ZBROJA

- Ako je svaki od pribrojnika djeljiv nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv tim brojem.

Primjer: Ne računajući zbroj brojeva 1152 i 243 odgovori hoće li on biti djeljiv s 9!
Zbroj je djeljiv s 9 jer su oba pribrojnika djeljiva s 9.

- DJELJIVOST RAZLIKE

- Ako su umanjenik i umanjitelj djeljivi s nekim brojem, onda je i razlika djeljiva s tim brojem.

Primjer: Ne računajući razliku brojeva 1152 i 243 odgovori hoće li ona biti djeljiva s 9!
Razlika je djeljiva s 9 jer su umanjenik i umanjitelj djeljivi s 9.

- DJELJIVOST UMNOŠKA

- Ako je jedan od faktora djeljiv nekim brojem, onda je i umnožak djeljiv tim brojem.

Primjer: Ne računajući umnožak provjeri je li $9 \cdot 10$ djeljiv s 3!
Umnožak je djeljiv s 3 jer mu je prvi faktor (9) djeljiv s 3.

Prosti i složeni brojevi

Prosti brojevi su brojevi koji imaju dva djelitelja, broj 1 i samoga sebe.

Prosti brojevi su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, ...

Složeni brojevi su brojevi koji imaju više od dva djelitelja.

Složeni brojevi su: 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 42, 44, 45, 46, 48, 49, 50, 51, 52, 54, 55, 56, 57, 58, 60, 62, 63, 64, 65, 66, 68, 69, 70, 72, 74, 75, 76, 77, 78, 80, 81, 82, 84, 85, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 98, 99, 100, ...

Broj 1 nije ni prost ni složen.

Rastavljanje brojeva na proste faktore

Rastaviti broj na proste faktore znači taj broj napisati kao umnožak prostih faktora.

$$6 = 2 \cdot 3$$

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$$

$$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$$

$$50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$$

Svaki složeni broj možemo rastaviti na proste faktore.

Svaki prirodni broj ima jedinstven rastav na proste faktore.

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \quad 84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7$$

Zajednički djelitelji

Broj koji je djelitelj dvaju ili više zadanih brojeva zovemo zajedničkim djeliteljem tih brojeva. Najveći zajednički djelitelj brojeva a i b, D (a,b), je najveći broj kojim su djeljivi (svi) zadani brojevi a i b.

Primjer: Odredi zajedničke djelitelje brojeva 8 i 12.
Koji je zajednički djelitelj najveći ?

BROJ	SVI NJEGOVI DJELITELJI
8	1, 2, 4, 8
12	1, 2, 3, 4, 6, 12

ZAJEDNIČKI DJELITELJI BROJEVA 8 i 12 SU: 1, 2, 4.

NAJVEĆI ZAJEDNIČKI DJELITELJ BROJEVA 8 i 12 JE 4.

$$D(8, 12) = 4$$

Primjer: Odredi najveći zajednički djelitelj brojeva 75, 100.

$$\begin{array}{r|l} 75, 100 & 5 \\ 15, 20 & 5 \\ 3, 4 & \end{array} \quad D(75, 100) = 5 \cdot 5 = 25$$

Brojevi koji nemaju zajedničkog prostog djelitelja zovu se *relativno prosti brojevi*. Njihov je najveći zajednički djelitelj broj 1. Dakle ako je $D(a, b) = 1$, onda su a i b relativno prosti brojevi.

Najmanji zajednički višekratnik

Zajednički višekratnik dvaju brojeva je broj koji je djeljiv s oba broja.

Najmanji zajednički višekratnik dvaju brojeva je najmanji od brojeva koji su djeljivi s oba broja.

Najmanji zajednički višekratnik bilježimo $V(a, b)$.

Primjer: Odredi zajedničke višekratnike brojeva 6 i 9.

Broj	Svi njegovi višekratnici
6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ...
9	9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90, ...

Zajednički višekratnici od 6 i 9 su: 18, 36, 54, ...

Najmanji zajednički višekratnik od 6 i 9 je 18. To kraće zapisujemo $V(6, 9) = 18$

Primjer: Odredi $V(18, 30)$

18, 30		2
9, 15		3
3, 5		3
1, 5		5
1, 1		

$$V(18, 30) = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$$

Ako su zadani brojevi prosti, ili relativno prosti, onda je najmanji zajednički višekratnik jednak njihovu umnošku. Ako je $D(a, b) = 1$, onda je $V(a, b) = a \cdot b$.

Primjer: Odredi $V(5, 8)$

Brojevi 5 i 8 nemaju zajedničkog djelitelja (različitog od 1) pa je njihov najmanji zajednički višekratnik njihov umnožak.

$$V(5, 8) = 5 \cdot 8 = 40$$

CIJELI BROJEVI

Razlika dva prirodna broja nije uvijek prirodan broj. $a-b$ ne pripada skupu N ako je $a < b$. Računska operacija oduzimanja i razna mjerenja u prirodi (temperature, nadmorske visine) navela su nas na potrebu proširivanja skupa N na skup cijelih brojeva Z .

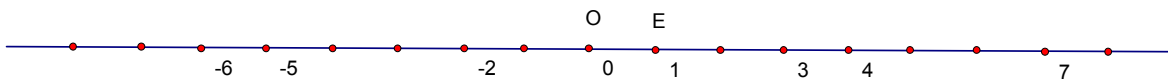
$$Z = \{\dots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

Prikazivanje cijelih brojeva na pravcu

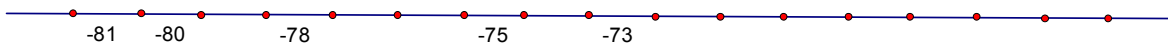
0	-	ishodište
E	-	jedinična točka
\overline{OE}	-	jedinična dužina

Na brojevnom pravcu desno od nule smješteni su prirodni (pozitivni cijeli) brojevi $1, 2, 3, \dots$, a lijevo od nule negativni cijeli brojevi $-1, -2, -3, \dots$

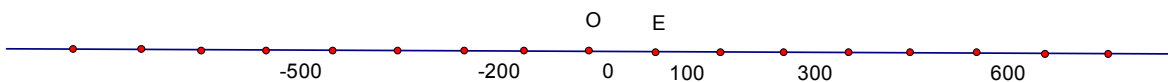
Primjer: Na brojevnom pravcu istakni točke kojima su pridruženi sljedeći brojevi: $7, -5, 3, -2, 4, -6$



Primjer: Na brojevnom pravcu istakni točke kojima su pridruženi sljedeći brojevi: $-75, -73, -78$



Primjer: Na brojevnom pravcu istakni točke kojima su pridruženi sljedeći brojevi: $-200, 300, -500, 600$



Suprotni brojevi i apsolutna vrijednost

Brojevi simetrično smješteni na brojevnom pravcu s obzirom na nulu nazivaju se SUPROTNI BROJEVI.

Broju 6 suprotan je broj -6.

Broju -4 suprotan je broj 4.

Broju 0 suprotan je broj 0.

Apsolutna vrijednost cijelog broja nam govori koliko jediničnih dužina je taj cijeli broj udaljen od 0.

Primjer: $|17| = 17$

$$|-5| = 5$$

$$|0| = 0$$

Apsolutna vrijednost svakog cijelog broja je pozitivan broj ili 0.

$$|-8| = 8 \quad |10| = 10$$

$$|8| = 8 \quad |-10| = 10$$

Suprotni brojevi imaju jednaku apsolutnu vrijednost.

Primjer: Nadi sve cijele brojeve z za koje vrijedi:

a) $|z| = 5$

$$z = \pm 5$$

b) $|z| < 4$

$$z = \pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$$

c) $|z| \geq 5$.

$$z = \pm 5, \pm 6, \pm 7, \dots$$

Uspoređivanje cijelih brojeva

Svaki pozitivni cijeli broj veći je od nule.

Primjer: $13 > 0$

$$0 < 298$$

Svaki negativan cijeli broj manji je od nule.

Primjer: $-13 < 0$
 $0 > -298$

Svaki negativan cijeli broj manji je od svakog pozitivnog cijelog broja.

Primjer: $-35 < 2$
 $10 > -27$

Od dvaju pozitivnih cijelih brojeva veći je onaj koji ima veću apsolutnu vrijednost.

Primjer: $17 > 13$
 $52 > 4$
 $32 < 85$

Od dvaju negativnih cijelih brojeva veći je onaj koji ima manju apsolutnu vrijednost.

Primjer: $-4 > -7$
 $-15 > -43$

Primjer: Za koje sve cijele brojeve z vrijedi:
 $-3 < z \leq 2$
 $z = -2, -1, 0, 1, 2$

Primjer: Brojeve $-18, 23, -5, -14$ i 10 poredaj po veličini počevši od najvećeg.
 $23 > 10 > -5 > -14 > -18$

Zbrajanje cijelih brojeva

Brojevi jednakih predznaka zbrajaju se tako da se zbroje njihove apsolutne vrijednosti i zbroju ostavi isti predznak.

Primjer: $-3 + (-2) = -5$
 $-12 + (-1) = -13$
 $+3 + (+8) = +11$
 $+4 + (+2) = +6$

Zbroj dvaju suprotnih brojeva jednak je nuli.

Primjer: $-3 + 3 = 0$
 $15 + (-15) = 0$

Brojeve različitih predznaka zbrajamo tako da oduzmemo njihove apsolutne vrijednosti (manje od veće) i razlici stavimo predznak broja većeg po apsolutnoj vrijednosti.

Primjer: $-7 + 8 = 1$
 $23 + (-35) = -12$

Za svaki cijeli broj a vrijedi $a + 0 = a$

Primjer: $5 + 0 = 5$
 $-7 + 0 = -7$

Svojstva zbrajanja cijelih brojeva

1. Svojstvo komutativnosti.

Za svaka dva cijela broja a i b vrijedi $a+b=b+a$

2. Svojstvo asocijativnosti

Za svaka tri cijela broja a, b, c vrijedi $(a+b)+c=a+(b+c)$.

3. Suprotan broj

Za svaki cijeli broj a postoji njemu suprotan cijeli broj $-a$ takav da vrijedi $a+(-a)=-a+a=0$

4. Neutralni element

Za svaki cijeli broj a vrijedi $a+0=0+a=a$

Primjer: Izračunaj:

$$\begin{aligned} & -3+2+(-7)+3+6+(-3) \\ & =11+(-13) \\ & =-2 \end{aligned}$$

Primjer: Izračunaj:

$$\begin{aligned} & 5+(-2)+(-4)+2+9+(-5)+7 \\ & =23+(-11) \\ & =12 \end{aligned}$$

Primjer: Zbroji sve cijele brojeve koji zadovoljavaju nejednakost $-9 < x < 9$

$$\begin{aligned} & -8+(-7)+(-6)+(-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8 \\ & =0 \end{aligned}$$

Oduzimanje cijelih brojeva

Oduzeti cijeli broj znači pribrojiti mu suprotan broj

$$a-b = a+(-b), a, b \in \mathbf{Z}$$

Primjer:
 $-4-8=-4+(-8)=-12$
 $4-8=4+(-8)=-4$
 $3-(-2)=3+2=5$
 $-4-(-1)=-4+1=-3$

Primjer:
 $-5+6-7+4=$
 $=10-12=$
 $=-2$

Primjer:
 $-79-(-65)-(-48)-14=$
 $=-79+65+48-14=$
 $=113-93=$
 $=20$

Rad sa zagradama

Ako je ispred zagrade znak +, on se briše zajedno sa zagradom, a pri tome **NE MIJENJAMO PREDZNAK** brojeva u zagradi.

Ako je ispred zagrade znak -, on se briše zajedno sa zagradom, ali pri tome **MIJENJAMO PREDZNAKE** brojeva u zagradi.

Primjer:
 $-2 + (-3 + 2) =$
 $= -2 - 3 + 2 =$
 $= -5 + 2 =$
 $= -3$

Primjer:
 $-3 + (-7 - 1) + (-3 + 4) =$
 $= -3 - 7 - 1 - 3 + 4 =$
 $= -14 + 4 =$
 $= -10$

Primjer:
 $4 - (7 - 5 + 1) =$
 $= 4 - 7 + 5 - 1 =$
 $= 9 - 8 =$
 $= 1$

Primjer:
 $13 - (-2 - 4) - (2 - 9) =$
 $= 13 + 2 + 4 - 2 + 9 =$
 $= 28 - 2 =$
 $= 26$

Primjer:
 $-(2 - 3) + (-6 + 11) =$
 $= -2 + 3 - 6 + 11 =$
 $= 1 - 6 + 11 =$
 $= -5 + 11 =$
 $= 6$

Primjer
 $-(2 - 5) + (-1 + (-3 - 3) - 1 + 2) =$
 $= -2 + 5 + (-1 - 3 - 3 - 1 + 2) =$
 $= -2 + 5 - 1 - 3 - 3 - 1 + 2$
 $= -10 + 7$
 $= -3$

Množenje cijelih brojeva

Dva broja različitih predznaka množimo tako da pomnožimo njihove apsolutne vrijednosti i rezultatu damo negativan predznak.

Dva broja jednakih predznaka množimo tako da pomnožimo njihove apsolutne vrijednosti i rezultatu damo pozitivan predznak.

Dakle, cijele brojeve množimo tako da pomnožimo njihove apsolutne vrijednosti, a predznak odredimo u skladu s ovom tablicom:

$++ = +$
 $+ \cdot - = -$
 $- \cdot + = -$
 $- \cdot - = +$

Za svaki cijeli broj vrijedi :

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$$

$$a \cdot (-1) = (-1) \cdot a = -a$$

Ako je broj negativnih faktora paran, umnožak je pozitivan, a ako je broj negativnih faktora neparan, umnožak je negativan.

Primjer:

$$5 \cdot 7 = 35,$$

$$(-3) \cdot 2 = -6$$

$$4 \cdot (-6) = -24$$

$$(-3) \cdot (-7) = 21$$

$$-7 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot (-5) = -5$$

$$-3 \cdot (-1) = 3$$

Primjer:

$$(-2) \cdot (-3) \cdot (+5) = 30$$

$$(-3) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = -12$$

Primjer:

$$\begin{aligned} \text{a) } 2 + 3 \cdot (-5) &= \\ &= 2 - 15 = \\ &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } -2 \cdot 3 + 7 \cdot (-5) + (-7) \cdot (-1) &= \\ &= -6 + (-35) + 7 = \\ &= 7 - 41 = \\ &= -34 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (-5 - 2) \cdot (-8) &= \\ &= -7 \cdot (-8) = \\ &= 56 \end{aligned}$$

Dijeljenje cijelih brojeva

Dva cijela broja dijelimo tako da podijelimo njihove apsolutne vrijednosti.

Ako su brojevi jednakih predznaka, količnik je pozitivan.

Ako su brojevi različitih predznaka, količnik je negativan.

Za svaki cijeli broj z različit od nule vrijedi:

$$z : z = 1$$

$$z : 1 = z$$

$$0 : z = 0$$

$$z : (-z) = -1$$

$$z : (-1) = -z$$

$$z : 0 =$$

Primjer:

$$13 : (-1) = -13$$

$$56 : 8 = 7$$

$$(-25) : 5 = -5$$

$$49 : (-7) = -7$$

$$-35 : 1 = -35$$

$$42 : 0 = \text{Nije definirano!}$$

$$0 : 15 = 0$$

$$-36 : (-1) = 36$$

$$-7 : (-7) = 1$$

Primjer:

$$2 : (-1) - 12 : 4 =$$

$$= -2 - 3 =$$

$$= -5$$

Primjer:

$$(200-84) : 4 - (8-100) : 2 =$$

$$= 116 : 4 - (-92) : 2 =$$

$$= 29 + 46 =$$

$$= 75$$

RACIONALNI BROJEVI

Zbroj, razlika i umnožak dva cijela broja je uvijek cijeli broj, ali količnik dva cijela broja nije uvijek cijeli broj. $a:b$ ne pripada skupu Z ako a nije višekratnik broja b .

Razlomci

Razlomcima se izriče dio neke cjeline.



oboјano: $\frac{5}{12}$ pravokutnika

neoboјano: $\frac{7}{12}$ pravokutnika

Razlomak: $\frac{a}{b}$

- brojnik
- razlomačka crta
- nazivnik

Brojnik nam govori koliko smo jednakih dijelova označili, a nazivnik na koliko je jednakih dijelova podijeljeno jedno cijelo.

1. Koliki dio dana prespava čovjek ako spava 8 sati u danu?

$$\frac{8}{24} = \frac{1}{3}$$

2. Maca Crtka ima 10 mačića, od kojih je 6 potpuno bijelih, ostali su crni. Prikaži razlomkom broj crnih mačića.

$$\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{a}{b} = a:b, b \neq 0$$

Ako su brojnik i nazivnik jednaki, razlomak iznosi 1.

$$\frac{n}{n} = 1$$

Svaki prirodni broj možemo izraziti kao razlomak.

$$\frac{n}{1} = n$$

Ako je brojnik 0, vrijednost razlomka je 0.

$$\frac{0}{n} = 0$$

Razlomci kojima je brojnik višekratnik nazivnika jesu prirodni brojevi.

$$3. \quad \frac{18}{6} = 3$$

$$\frac{0}{6} = 0$$

$$\frac{7}{7} = 1$$

$$11 = \frac{11}{1}$$

$$4. \quad \text{Izračunaj } \frac{3}{4} \text{ od } 40.$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{4} \text{ od } 40 &= (40:4) \cdot 3 = \\ &= 10 \cdot 3 = \\ &= 30 \end{aligned}$$

$$5. \quad 3 \text{ dm} = \frac{3}{10} m$$

$$60 \text{ cm} = \frac{60}{100} m = \frac{3}{5} m$$

$$75 \text{ mm} = \frac{75}{1000} m = \frac{3}{40} m$$

Pravi razlomak je razlomak koji je manji od 1. Brojnik mu je manji od nazivnika.

Nepravi razlomak je razlomak koji je veći od 1. Brojnik mu je veći od nazivnika.

$$6. \quad \text{Pravi razlomci: } \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{7}, \frac{11}{12}, \frac{4}{19}$$

$$\text{Nepravi razlomci: } \frac{5}{2}, \frac{7}{6}, \frac{25}{9}, \frac{101}{100}, \frac{9}{8}, \frac{75}{37}$$

Nepravi razlomak možemo napisati u obliku mješovitog broja.

Mješoviti broj jest zapis nepravog razlomka u obliku zbroja prirodnog broja i pravog razlomka.

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}$$

$$\frac{19}{6} = 3\frac{1}{6}$$

$$14\frac{2}{5} = \frac{72}{5}$$

$$11\frac{1}{3} = \frac{34}{3}$$

$$a\frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

Proširivanje razlomaka:

Proširiti razlomak znači i brojnik i nazivnik pomnožiti s jednim te istim prirodnim brojem. Proširivanjem razlomka njegova se vrijednost ne mijenja.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad b \neq 0, c \neq 0$$

7. Koliko šestina ima u jednoj trećini?

$$\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{2}{6}$$

8. Razlomak $\frac{3}{5}$ proširi sa 4.

$$\frac{3}{5} = \frac{3 \cdot 4}{5 \cdot 4} = \frac{12}{20}$$

9. Razlomak $\frac{3}{4}$ proširi tako da brojnik bude 27.

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36}$$

10. Razlomak $\frac{5}{7}$ proširi tako da nazivnik bude 42.

$$\frac{5}{7} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 6} = \frac{30}{42}$$

11. Kojim smo brojem proširili razlomak $\frac{5}{7} = \frac{55}{77}$.

$$55:5=11$$

$$77:7=11$$

Skraćivanje razlomaka

Skraćiti razlomak znači i brojnik i nazivnik podijeliti s jednim te istim prirodnim brojem.

Skraćivanjem razlomka njegova vrijednost se ne mijenja.

Do kraja skratiti razlomak znači i brojnik i nazivnik zadanog razlomka podijeliti njihovim najvećim zajedničkim djeliteljem.

12. Razlomak $\frac{24}{30}$ skрати brojem 3.

$$\frac{24}{30} = \frac{24 : 3}{30 : 3} = \frac{8}{10}$$

13. Razlomak $\frac{64}{120}$ skрати do kraja.

1 način:

Postupno:

$$\frac{64}{120} = \frac{64 : 4}{120 : 4} = \frac{16}{30} = \frac{16 : 2}{30 : 2} = \frac{8}{15}$$

2 način:

Odjednom:

$$\begin{array}{r|l} 64, 120 & 2 \\ 32, 60 & 2 \\ 16, 30 & 2 \\ \hline 8, 15 & \end{array}$$

$$D(64, 120) = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

$$\frac{64}{120} = \frac{64 : 8}{120 : 8} = \frac{8}{15}$$

U praksi kraće zapisujemo ovako:

$$\frac{\cancel{64}^8}{\cancel{120}_{15}} = \frac{8}{15}$$

Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik

Postupak kojim zadane razlomke proširujemo do razlomaka s jednakim nazivnicima naziva se svođenje razlomaka na zajednički nazivnik.

Postupak svođenja razlomaka na najmanji zajednički nazivnik provodimo u dva koraka:

1. Odredimo najmanji zajednički višekratnik nazivnika zadanih razlomaka.
2. Zadane razlomke proširimo do razlomaka s tim zajedničkim nazivnikom.

14. Razlomke $\frac{3}{4}$ i $\frac{2}{3}$ svedu na najmanji zajednički nazivnik.

$$V(3, 4) = 12 \qquad \frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{9}{12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$$

Uspoređivanje razlomaka

Od dva razlomka jednakih nazivnika veći je onaj koji ima veći brojnik.

$$\frac{3}{5} > \frac{2}{5} \quad \text{jer je } 3 > 2$$

$$\frac{4}{7} < \frac{9}{7} \quad \text{jer je } 4 < 9$$

Od dva razlomka jednakih brojnika veći je onaj koji ima manji nazivnik.

$$\frac{5}{7} > \frac{5}{11} \quad \text{jer je } 7 < 11$$

$$\frac{3}{8} < \frac{3}{5} \quad \text{jer je } 8 > 5$$

Razlomke različitih brojnika i nazivnika uspoređujemo tako da ih svedemo na zajednički nazivnik, a onda ih usporedimo po pravilu za uspoređivanje razlomaka s jednakim nazivnicima.

$$\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \quad \text{jer je } \frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \frac{2}{3} = \frac{8}{12}, \text{ a } \frac{9}{12} > \frac{8}{12}$$

Ili po pravilu:

Za razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \quad \text{ako je } ad < bc$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ako je } ad = bc$$

$$\frac{a}{b} > \frac{c}{d} \quad \text{ako je } ad > bc$$

15. Usporedi razlomke:

$$\frac{84}{7} < \frac{88}{12} \qquad \frac{35}{6} < \frac{36}{7}$$

Decimalni brojevi i decimalni razlomci

Decimalni ili dekadski razlomci su razlomci kojima je nazivnik jedan od brojeva: 1, 10, 100, 1 000, 10 000...

1. Napiši tri dekadski razlomka.

$$\frac{7}{10}, \frac{347}{100}, \frac{835}{1000}$$

Decimalni zapis jest način zapisivanja decimalnog razlomka.

$\frac{17382}{1000} = 17.382$

← dekadski ili cijeli dio

→ decimalni dio ili decimale

→ decimalna točka

Decimalna točka razdvaja dekadski i decimalni dio.

Decimalni broj jest broj koji ima decimalni zapis.

$$\frac{284}{10} = 28.4$$

nazivnik
dekadskog
razlomka ima
jednu nulu

decimalni zapis
ima jedno
decimalno mjesto

$$\frac{35}{100} = 0.35$$

dekadski
razlomak ima
dvije nule u
nazivniku

decimalni zapis
ima dva
decimalna mjesta

2. Zapiši broj u decimalnom zapisu

$$3 + \frac{75}{1000} = 3.075$$

$$\frac{3}{2} = \frac{15}{10} = 1.5$$

$$\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0.4$$

$$\frac{7}{25} = \frac{28}{100} = 0.28$$

3. Dopuni:

$$24 \text{ cm} = 0.24 \text{ m}$$

$$37 \text{ mm} = 0.037 \text{ m}$$

$$2 \text{ dm} = 0.2 \text{ m}$$

Zaokruživanje decimalnih brojeva

Postupak zaokruživanja decimalnih brojeva:

1. Uoči znamenku na koju želiš zaokružiti
2. Promotri prvu sljedeću znamenku
3. Ako je prva znamenka koju želiš zanemariti 0, 1, 2, 3, 4, posljednja znamenka koju želiš zadržati ostaje ista (zaokruživanje na niže).

Ako je prva znamenka koju želiš zanemariti 5, 6, 7, 8 ili 9, posljednju znamenku koju želimo zadržati povećamo za 1.

4. Broj 483.264 zaokruži na:

a) dvije decimale

c) cijeli dio

b) jednu decimalu

d) najbližu deseticu

$$a) 483.264 \approx 483.26$$

$$b) 483.264 \approx 483.3$$

$$c) 483.264 \approx 483$$

$$d) 483.264 \approx 480$$

5. Zaokruži na cijeli dio

$$399.77 \approx 400$$

$$101.10 \approx 101$$

Uspoređivanje decimalnih brojeva

Od dva decimalna broja veći je onaj koji ima veći cijeli dio.

$$387.1 < 486.9$$

$$6.2 > 2.8976545$$

Ako su cijeli dijelovi jednaki, onda uspoređujemo decimale, ovim redoslijedom: prve, ako su iste prelazimo na druge, ako su i one iste prelazimo na treće, ..., sve dok ne nađemo na jednog od njih koji ima veću decimalu, pa zaključujemo da je on veći.

$$7.1232 > 7.1223$$

$$3.23 < 3.231$$

$$1.23456 = 1.234560$$

Ako decimalni broj na zadnjim decimalnim mjestima ima nule, te nule možemo ispustiti a broj se pritom neće promijeniti.

$$23.450 = 23.45$$

$$657.23000 = 657.23$$

$$8 = 8.0 = 8.00 = 8.000 = 8.0000 = 8.00000 = \dots$$

Računska operacija dijeljenja navodi nas na potrebu proširivanja skupa cijelih brojeva.

Skup racionalnih brojeva je skup svih razlomaka i svih brojeva koji se mogu zapisati u obliku razlomka.

Skup racionalnih brojeva označavamo Q.

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} : a \in Z, b \in N \right\}$$

Zbrajanje i oduzimanje racionalnih brojeva

Za racionalne brojeve $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi:

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}$$

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$$

$$6. \quad \frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5}$$

$$7. \quad \frac{9}{11} - \frac{2}{11} = \frac{7}{11}$$

$$8. \quad -\frac{7}{12} - \frac{1}{12} = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$$

$$9. \quad -\frac{7}{10} + \frac{3}{5} = \frac{-7+6}{10} = -\frac{1}{10}$$

$$10. \quad -2\frac{1}{2} + 1\frac{1}{8} =$$

$$= -\frac{5}{2} + \frac{9}{8} =$$

$$= \frac{-20+9}{8} =$$

$$= -\frac{11}{8} = -1\frac{3}{8}$$

$$11. \quad -\frac{2}{3} - \left(-\frac{3}{4}\right) =$$

$$= -\frac{2}{3} + \frac{3}{4} =$$

$$= \frac{-8+9}{12} =$$

$$= \frac{1}{12}$$

$$12. \quad -\frac{3}{4} - \left(-\frac{7}{10}\right) - \frac{1}{2} =$$

$$= -\frac{3}{4} + \frac{7}{10} - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{-15+14-10}{20} =$$

$$= -\frac{11}{20}$$

$$13. \quad 0.788 + (-0.877) =$$

$$= -0.089$$

$$14. \quad 8.04 - 5.6 - 1.9 - (-3.83) =$$

$$= 8.04 - 5.6 - 1.9 + 3.83 =$$

$$= 11.87 - 7.5 =$$

$$= 4.37$$

$$\begin{aligned}
 15. \quad & -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \\
 & = -\frac{2+3}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \\
 & = -\frac{5}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \\
 & = \frac{-50-15+12}{60} = \\
 & = -\frac{53}{60}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 16. \quad & -3.5 + \left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\right) - \left(0.7 - \frac{1}{4}\right) = \\
 & = -\frac{7}{2} + \frac{3-4}{8} - \left(\frac{7}{10} - \frac{1}{4}\right) = \\
 & = -\frac{7}{2} - \frac{1}{8} - \frac{14-5}{20} = \\
 & = -\frac{7}{2} - \frac{1}{8} - \frac{9}{20} = \\
 & = \frac{-140-5-18}{40} = \\
 & = -\frac{163}{40} = -4\frac{3}{40}
 \end{aligned}$$

Množenje decimalnih brojeva

Za racionalne brojeve $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$17. \quad -\frac{6^2}{7_1} \cdot \left(-\frac{14^2}{8_3}\right) = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

$$18. \quad -5\frac{5}{7} \cdot (-0.4) = -\frac{40^8}{7} \cdot \left(-\frac{2}{8_1}\right) = \frac{16}{7} = 2\frac{2}{7}$$

$$19. \quad -0.5 \cdot 0.6 = -0.3$$

$$\begin{aligned}
 20. \quad & -3\frac{3}{5} \cdot \left(-2\frac{2}{9}\right) \cdot \left(-3\frac{1}{2}\right) = \\
 & = -\frac{18^2}{\cancel{9}_1} \cdot \left(-\frac{20^2}{\cancel{9}_1}\right) \cdot \left(-\frac{7}{\cancel{2}_1}\right) = \\
 & = -28
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 21. \quad & 1 - 2\frac{1}{3} \cdot 1\frac{2}{7} + 0.8 = \\
 & = 1 - \frac{\cancel{7}^1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{\cancel{9}^3}{\cancel{7}_1} + \frac{4}{5} = \\
 & = 1 - 3 + \frac{4}{5} = \\
 & = -2 + \frac{4}{5} = \\
 & = \frac{-10 + 4}{5} = \\
 & = -\frac{6}{5} = -1\frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 22. \quad & \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{9}{5} + 0.7\right) + 0.6 \cdot \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{2}\right) = \\
 & = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{9}{5} + \frac{7}{10}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{3-5}{10} = \\
 & = \frac{4}{5} \cdot \frac{-18+7}{10} + \frac{3}{5} \cdot \frac{-2^1}{\cancel{10}_5} = \\
 & = \frac{\cancel{4}^2}{5} \cdot \frac{-11}{\cancel{10}_5} - \frac{3}{25} = \\
 & = -\frac{22}{25} - \frac{3}{25} = \\
 & = -\frac{25}{25} = -1
 \end{aligned}$$

Dijeljenje racionalnih brojeva

$\frac{b}{a}$ je recipročni broj broja $\frac{a}{b}$.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

Racionalni broj	1.4	-3	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$
Recipročna vrijednost	$\frac{5}{7}$	$-\frac{1}{3}$	2	$\frac{5}{2}$

Za racionalne brojeve $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ vrijedi:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

$$23. \quad \frac{3}{8} : \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{15}{56}$$

$$24. \quad \frac{16}{7} : (-4) = \frac{4\cancel{16}}{7} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{4}_1}\right) = -\frac{4}{7}$$

$$25. \quad -2\frac{1}{6} : 8\frac{2}{3} = -\frac{13}{6} : \frac{26}{3} = -\frac{\cancel{13}^1}{\cancel{6}_2} \cdot \frac{\cancel{3}^1}{\cancel{26}_2} = -\frac{1}{4}$$

$$26. \quad -3\frac{1}{2} : (-5.25) = -\frac{7}{2} : \left(-\frac{\cancel{525}^{21}}{\cancel{100}_4}\right) = -\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{2}_1} \cdot \left(-\frac{\cancel{4}^2}{\cancel{21}_3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$27. \quad -18.9 : 2.5 = -189 : 25 = -7.56$$

$$\begin{array}{r} 140 \\ 150 \\ // \end{array}$$

$$28. \quad 3 : 4 = 0.75$$

$$\begin{array}{r} 30 \\ 20 \\ // \end{array}$$

$$29. \quad -5\frac{1}{4} : 1\frac{7}{8} : 1.5 =$$

$$-\frac{21}{4} : \frac{15}{8} : \frac{\cancel{15}^3}{\cancel{10}_2} =$$

$$-\frac{\cancel{21}^7}{\cancel{4}^1} \cdot \frac{\cancel{8}^2}{15} \cdot \frac{2}{\cancel{10}_1} =$$

$$= -\frac{28}{15} =$$

$$= -1\frac{13}{15}$$

30.

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{3} - (-1) : \frac{3}{4} + \frac{4}{5} : \left(-1\frac{1}{15}\right) = \\
 & = \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{4}{3} + \frac{4}{5} : \left(-\frac{16}{15}\right) = \\
 & = \frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{\cancel{4}^1}{\cancel{5}_1} \cdot \left(\frac{\cancel{15}^3}{\cancel{16}_4}\right) = \\
 & = \frac{5}{3} - \frac{3}{4} = \\
 & = \frac{20-9}{12} = \\
 & = \frac{11}{12}
 \end{aligned}$$

31.

$$\begin{aligned}
 & \frac{7}{8} - \left[-\frac{3}{4} : 6 + \left(\frac{5}{6} : 0.3 - 2 : 1\frac{1}{3}\right) + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} - \left[-\frac{\cancel{3}^1}{4} \cdot \frac{1}{\cancel{6}_2} + \left(\frac{5}{6} : \frac{3}{10} - 2 : \frac{4}{3}\right) + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} - \left[-\frac{1}{8} + \left(\frac{5}{\cancel{6}_3} \cdot \frac{\cancel{10}^5}{3} - \cancel{2}^1 \cdot \frac{3}{\cancel{4}_2}\right) + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} - \left[-\frac{1}{8} + \left(\frac{25}{9} - \frac{3}{2}\right) + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} - \left[-\frac{1}{8} + \frac{50-27}{18} + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} - \left[-\frac{1}{8} + \frac{23}{18} + 1\right] = \\
 & = \frac{7}{8} + \frac{1}{8} - \frac{23}{18} - 1 = \\
 & = -\frac{23}{18}
 \end{aligned}$$

Podskupovi racionalnih brojeva su prirodni i cijeli brojevi . Naime svaki prirodni broj i svaki cijeli broj je i racionalan broj.

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q$$

Racionalne brojeve zapisujemo u obliku razlomka ali i u obliku decimalnog broja. Svaki razlomak može se zapisati u obliku konačnog decimalnog broja, beskonačnog periodičkog decimalnog broja (čisto periodičkog i mješovito periodičkog decimalnog broja).

Od neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$ dobijemo **konačan decimalni broj** ako nazivnik u svom rastavu na proste faktore ima samo dvojke i petice .

Od neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$ dobijemo **čisto periodički decimalni broj** ako nazivnik u svom rastavu na proste faktore nema ni 2 ni 5. Kod tih brojeva se jedna ili grupa decimala periodički ponavlja . Znamenku ili grupu znamenki koje se ponavljaju naziva se perioda . Periodu označavamo točkom povrh znamenke koja se ponavlja, a ako se ponavlja grupa znamenki, onda točkom povrh znamenke kojom počinje i kojom završava .

Od neskrativog razlomka $\frac{a}{b}$ dobijemo **mješovito periodički decimalni broj** ako nazivnik u svom rastavu na proste faktore ima faktor 2, 5 ili 2 i 5 i još neki prosti broj. To su brojevi s beskonačno mnogo decimala od kojih se jedna ili više decimala na početku ne ponavljaju (**pretperiod**), a zatim se jedna ili više decimala periodički ponavljaju .

Primjer :

$$\text{a) } \frac{3}{5} = 3 : 5 = 0.6 \qquad \frac{3}{4} = 3 : 4 = 0.75 \qquad \frac{7}{10} = 0.7$$

Prosti faktor 5 Prosti faktor 2 Prosti faktor 2 i 5

$$\text{b) } \frac{2}{3} = 2 : 3 = 0.6\dot{6} = 0.6\dot{6}$$

20
20

$$\frac{5}{11} = 5 : 11 = 0.4545\dot{4}5 = 0.4\dot{5}$$

50
60
50

$$\text{c) } \frac{5}{6} = 5 : 6 = 0.833\dot{3} = 0.8\dot{3}$$

50
20
20

$$\frac{7}{15} = 7 : 15 = 0.4\overline{6}$$

$$\begin{array}{r} 70 \\ 100 \\ 10 \end{array}$$

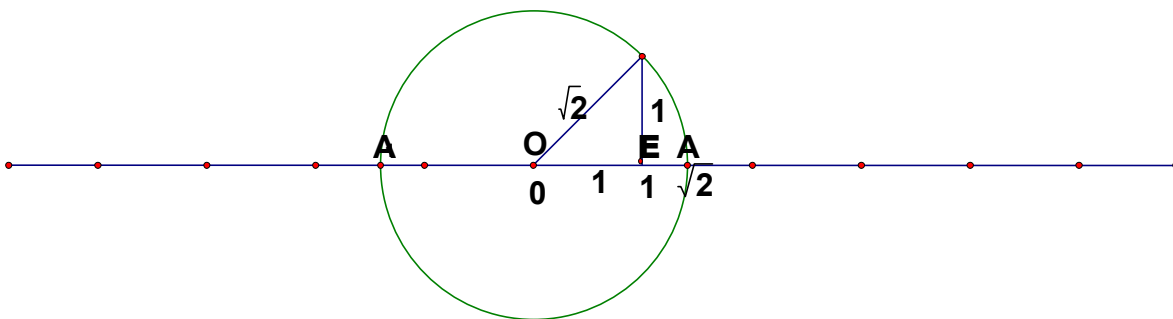
Pitagora i Pitagorejci su čvrsto vjerovali da se sve može prikazati u obliku broja pri čemu je svaki broj količnik dva cijela broja. Međutim kad su pokušali izmjeriti duljinu hipotenuze jednakokravnog pravokutnog trokuta došli su do zaključka da se ona ne može prikazati kao količnik (omjer) dva prirodna broja. To je za njih bio šok i tu tvrdnju da postoje brojevi koji se ne mogu prikazati kao količnik (omjer) dva prirodna (cijela broja) čuvali su u dubokoj tajnosti. Otkrili su **IRACIONALNE BROJEVE.**

$\pi, \sqrt{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, \sqrt{5}, -\sqrt{5} \dots \rightarrow$ Beskonačni neperiodički decimalni brojevi

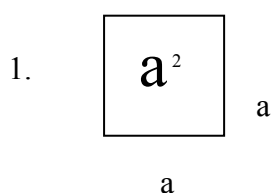
IRACIONALNI BROJEVI

Iracionalne brojeve ne možemo napisati u obliku razlomka. Svi racionalni brojevi zajedno s iracionalnim brojevima tvore skup realnih brojeva $Q \cup I = R$

Svakom realnom broju možemo pridružiti određenu točku brojevnog pravca.

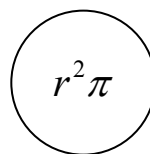


KVADRIRANJE



$$a^2 = a \cdot a$$

a- duljina stranice



$$r^2 = r \cdot r$$

r- radijus

Kvadrirati broj znači pomnožiti ga sa samim sobom.

VAŽNO!

a) $-5^2 \neq (-5)^2$
 $-25 \neq 25$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$
 $\frac{4}{9} \neq \frac{4}{3}$

Kad kvadriramo negativan broj, negativan broj obavezno dolazi u zagradi.

Kad kvadriramo razlomak, razlomak obavezno dolazi u zagradi.

c) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \neq -\left(\frac{1}{2}\right)^2$

$$\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{4}$$

d) $0.2^2 = 0.04$

Kvadrat decimalnog broja ima duplo više decimala od decimalnog broja kojeg kvadriramo.

2.

$$(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$(a \cdot b \cdot c)^2 = a^2 \cdot b^2 \cdot c^2$$

Umnožak kvadriramo tako da kvadriramo svaki faktor i dobivene kvadrate pomnožimo, tj. kvadrat umnoška jednak je umnošku kvadrata.

Primjer:

$$\left(\frac{32}{25}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{16}\right)^2 = \left(\frac{\cancel{32}^2}{\cancel{25}_5} \cdot \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{16}_1}\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot 100^2 \cdot \left(\frac{5}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{\cancel{5}_1} \cdot \cancel{100}^1 \cdot \frac{\cancel{5}^1}{\cancel{100}_1}\right)^2 = 1^2 = 1$$

3.

$(a : b)^2 = a^2 : b^2$ \longrightarrow **Kvadrat količnika jednak je količniku kvadrata i obratno,**

$a^2 : b^2 = (a : b)^2$ \longrightarrow **Količnik kvadrata jednak je kvadratu količnika .**

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = (a : b)^2 = a^2 : b^2$$

Primjer :

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 : \left(\frac{28}{15}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{7}{5} : \frac{28}{15}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{\cancel{7}^1}{\cancel{5}_1} \cdot \frac{\cancel{15}^3}{\cancel{28}_4}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

4. **KVADRAT ZBROJA I RAZLIKE** (KVADRAT BINOMA – dvočlani izraz)

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$(I \pm II)^2 = I^2 \pm 2 \cdot I \cdot II + II^2$$

Primjeri:

$$\begin{aligned}(2x + y)^2 &= (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 \\ &= 4x^2 + 4xy + y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(0.5xy - 2)^2 &= (0.5xy)^2 - 2 \cdot 0.5xy \cdot 2 + 2^2 \\ &= 0.25x^2y^2 - 2xy + 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(1\frac{2}{3}a + \frac{3}{5}b\right)^2 &= \left(\frac{5}{3}a + \frac{3}{5}b\right)^2 = \\ &= \left(\frac{5}{3}a\right)^2 + 2 \cdot \frac{5}{3}a \cdot \frac{3}{5}b + \left(\frac{3}{5}b\right)^2 \\ &= \frac{25}{9}a^2 + 2ab + \frac{9}{25}b^2 \end{aligned}$$

5. RAZLIKA KVADRATA

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

$$(I+II)(I-II) = I^2 - II^2$$

$$I^2 - II^2 = (I+II)(I-II)$$

Primjeri:

$$\begin{aligned} (x+2y)(x-2y) &= x^2 - (2y)^2 \\ &= x^2 - 4y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0.01x^2 - 25y^2 &= (0.1x)^2 - (5y)^2 \\ &= (0.1x - 5y)(0.1x + 5y) \end{aligned}$$

KORJENOVANJE

Naučili smo da kvadrirati neki broj znači pomnožiti broj sa samim sobom.

Kod **korjenovanja** imamo obrnuti postupak . Traži se kojemu je poznat kvadrat.

Kažemo da ćemo tražiti **korijen** nekog broja .Postupak traženja broja čiji je kvadrat poznat naziva se korjenovanje.

Znak \sqrt{n} čitaj: „**drugi korijen iz n**“

n je potkorijena veličina (u osnovnoj školi radimo samo drugi korijen iz $n \geq 0$)

Primjer 1. : Izračunaj opseg kvadrata čija je površina 49 cm^2 .

$$P = 49 \text{ cm}^2$$

$$O = ?$$

$$O = 4 \cdot a$$

$$O = 4 \cdot 7 \text{ cm}$$

$$O = 28 \text{ cm}$$

$$P = a^2$$

$$49 \text{ cm}^2 = a^2$$

$$a = \sqrt{49 \text{ cm}}$$

$$a = 7 \text{ cm}$$

Primjer 2. : a) $\sqrt{25} = 5$ jer je $5^2 = 25$

$$d) \sqrt{(-6)^2} = 6$$

$$b) \sqrt{0.36} = 0.6 \text{ jer je } 0.6^2 = 0.36$$

$$e) \sqrt{\left(-\frac{4}{9}\right)^2} = \frac{4}{9}$$

$$c) \sqrt{0} = 0$$

$$f) \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = 2a \text{ samo za } a \geq 0$$

$$\text{ili za svaki } a \sqrt{4a^2} = \sqrt{(2a)^2} = |2a|$$

Za $a \geq 0$ vrijedi $(\sqrt{a})^2 = a$

Za bilo koji a (pozitivan,negativan ili 0) vrijedi $\sqrt{a^2} = |a|$ Kwadratni korijen je nenegativan broj.

RAČUNANJE S KORIJENIMA

Zbrajanje i oduzimanje korijena

Zbrajamo odnosno oduzimamo samo korijene istih potkorijenih veličina, tako da zbrojimo odnosno oduzmemo koeficijente i dobiveni zbroj odnosno razliku pomnožimo sa zadanim korijenom.

Primjeri:

$$3\sqrt{2} + \sqrt{3} - 2\sqrt{2} = (3-2)\sqrt{2} + \sqrt{3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}$$

$$-3\sqrt{a} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{a} - \sqrt{2} = -7\sqrt{a} + 4\sqrt{2}$$

Množenje i dijeljenje korijena

Množenje

Umnožak korijena dvaju brojeva a i b jednak je korijenu umnoška tih brojeva.

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad a \geq 0 \quad b \geq 0$$

Primjeri:

$$\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{8 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\sqrt{18} \cdot \sqrt{72} = \sqrt{18 \cdot 72} = \sqrt{18 \cdot 18 \cdot 4} = \sqrt{18^2 \cdot 2^2} = \sqrt{(18 \cdot 2)^2} = 36$$

Dijeljenje

Količnik korijena dvaju brojeva a i b jednak je korijenu količnika tih brojeva.

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a : b}$$

Primjeri:

$$\sqrt{27} : \sqrt{\frac{1}{3}} = \sqrt{27 : \frac{1}{3}} = \sqrt{27 \cdot 3} = \sqrt{81} = 9$$

$$\sqrt{72} : \sqrt{2} = \sqrt{72 : 2} = \sqrt{36} = 6$$

Vrijede obrati za množenje i dijeljenje

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \quad \sqrt{a : b} = \sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{a} : \sqrt{b} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

DJELOMIČNO KORJENOVANJE

Djelomično korjenovanje koristimo kad potkorijena veličina nije kvadrat nekog racionalnog broja. Potkorijenu veličinu tada pišemo u obliku umnoška prostih faktora i potpunih kvadrata (4,9,16,25,36...). Zatim korijen umnoška zapišemo kao umnožak korijena i na kraju računamo korijene potpunih kvadrata.

$$\text{Primjeri : } \sqrt{48} = \sqrt{16 \cdot 3} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{75} - \sqrt{27} + \sqrt{108} &= \sqrt{25 \cdot 3} - \sqrt{9 \cdot 3} + \sqrt{36 \cdot 3} = \\ &= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = \\ &= 8\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

RACIONALIZACIJA NAZIVNIKA

Racionalizacija nazivnika je postupak kojim se oslobađamo korijena u nazivniku. Koristimo proširivanje razlomka (vrijednost razlomka se ne mijenja ako brojnik i nazivnik pomnožimo istim brojem).

$$\text{Primjeri : } \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{10} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{20}}{(\sqrt{10})^2} = \frac{2\sqrt{4 \cdot 5}}{10} = \frac{4\sqrt{5}}{10} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

LINEARNE JEDNADŽBE S JEDNOM NEPOZNANICOM

Jednakost je izjava u kojoj stoji znak = .

Primjer: $3 \cdot 4 - 1 = 18 - 7$

Jednadžba je jednakost u kojoj se nalazi nepoznatica . Nepoznanicu možemo označiti bilo kojim slovom , ali najčešće je označavamo slovom x.

Svaka jednadžba koja se može svesti na jednadžbu oblika $ax + b = 0$, gdje su a i b racionalni brojevi i $a \neq 0$, zove se linearna jednadžba sa jednom nepoznanicom. Rješenje jednadžbe je broj koji uvršten u jednadžbu umjesto nepoznanice , daje istinitu jednakost.

Pri rješavanju jednadžbe koristimo se sljedećim pravilima :

- Lijevoj i desnoj strani jednadžbe možemo pribrojiti ili oduzeti isti broj.

Primjer:

$$\begin{aligned}x + 2 = 5 & / -2 \\x + 2 - 2 = 5 - 2 \\x & = 3\end{aligned}$$

Primjer:

$$\begin{aligned}x - 4 = 3 & / +4 \\x - 4 + 4 = 3 + 4 \\x & = 7\end{aligned}$$

- Obje strane jednadžbe možemo množiti ili dijeliti istim brojem različitim od nule.

Primjer:

$$\begin{aligned}4x = 20 & / :4 \\ \cancel{4}x = \frac{20}{\cancel{4}} \\ x & = 5\end{aligned}$$

Primjer:

$$\begin{aligned}\frac{x}{5} = 20 & / \cdot 5 \\ \cancel{\frac{x}{5}} \cdot \cancel{5} = 20 \cdot 5 \\ x & = 100\end{aligned}$$

Primjer: Je li $x = 5$ rješenje jednadžbe $3x - 1 = x + 9$.

$$\begin{aligned}3x - 1 & = x + 9 \\ 3 \cdot 5 - 1 & = 5 + 9 \\ 15 - 1 & = 14 \\ 14 & = 14 \\ x = 5 & \text{ jest rješenje zadane jednadžbe.}\end{aligned}$$

Primjer: Riješi jednađbu :

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & 4x - 7 - x + 2 = 3x + 5 - x - 1 \\ & 4x - \cancel{x} - 3x + \cancel{x} = 5 - 1 + 7 - 2 \\ & x = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & 3x - (2x - 1) = 5 + (2x + 3) \\ & 3x - 2x + 1 = 5 + 2x + 3 \\ & 3x - 2x - 2x = 5 + 3 - 1 \\ & -x = 7 \quad / \quad :(-1) \\ & x = -7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 2(x - 3) = 3 - 2(x + 1) \\ & 2x - 6 = 3 - 2x - 2 \\ & 2x + 2x = 3 - 2 + 6 \\ & 4x = 7 \quad / \quad :4 \\ & x = \frac{7}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & 0.5x - \frac{x}{3} + \frac{5x}{6} - 0.4x = 0.8 \\ & \frac{1}{2}x - \frac{x}{3} + \frac{5x}{6} - \frac{2}{5}x = \frac{4}{5} \quad / \quad \cdot 30 \\ & 15x - 10x + 25x - 12x = 24 \\ & 18x = 24 \quad / \quad :18 \\ & x = \frac{24}{18} \\ & x = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \frac{8-x}{6} - \frac{5-4x}{3} = \frac{x+6}{2} \quad / \quad \cdot 6 \\ & (8-x) - 2(5-4x) = 3(x+6) \\ & 8-x-10+8x = 3x+18 \\ & -x+8x-3x = 18-8+10 \\ & 4x = 20 \quad / \quad :4 \\ & x = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}(0.2x - 3) = \frac{1}{4} \\ & \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}x - 3\right) = \frac{1}{4} \\ & \frac{2}{3} - \frac{1}{10}x + \frac{3}{2} = \frac{1}{4} \quad / \quad \cdot 60 \\ & 40 - 6x + 90 = 15 \\ & -6x = -90 - 40 + 15 \\ & -6x = -115 \quad / \quad :(-6) \\ & x = \frac{115}{6} \end{aligned}$$

Primjer: Uvećamo li neki broj 4 puta, a onda još za 4, dobijemo 24. Koji je to broj ?

$$\begin{aligned}4x+4 &= 24 \\4x &= 24-4 \\4x &= 20 \quad / :4 \\x &= 5\end{aligned}$$

To je broj 5.

Primjer: Uvećaš li dvokratnik nekog broja za 7, dobit ćeš jednako kao da si umanjila peterokratnik istog broja za 8 . Koji je to broj?

$$\begin{aligned}2x+7 &= 5x-8 \\2x-5x &= -8-7 \\-3x &= -15 \quad / :(-3) \\x &= 5\end{aligned}$$

To je broj 5.

Primjer: Broj uvećan za $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$ svoje vrijednosti iznosi 22. Koji je to broj?

$$\begin{aligned}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x &= 22 \quad / \cdot 6 \\6x + 3x + 2x &= 132 \\11x &= 132 \quad / :11 \\x &= 12\end{aligned}$$

To je broj 12.

Primjer: Zbroj triju uzastopnih cijelih brojeva jest 36. Koji su to brojevi ?

Tri uzastopna prirodna broja označimo $x-1$, x , $x+1$.

$$(x-1) + x + (x+1) = 36$$

$$x - \cancel{1} + x + x + \cancel{1} = 36$$

$$x + x + x = 36$$

$$3x = 36 \quad / :3$$

$$x = 12$$

To su brojevi 11, 12 i 13.

Primjer: Marko ima 113 sličica, a Fran 125. Koliko sličica treba Fran dati Marku da imaju jednako?

$$\begin{aligned}113 + x &= 125 - x \\x + x &= 125 - 113 \\2x &= 12 \quad / :2 \\x &= 6\end{aligned}$$

Fran treba dati Marku 6 sličica.

Primjer: Drveni je stup petinom duljine u zemlji, trećinom u vodi, a 84 cm se nalazi iznad vode. Kolika je duljina stupa?

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x + \frac{1}{3}x + 84 &= x \quad / \cdot 15 \\3x + 5x + 1260 &= 15x \\3x + 5x - 15x &= -1260 \\-7x &= -1260 \quad / :(-7) \\x &= 180\end{aligned}$$

Duljina stupa je 180 cm.

Primjer: Kolika je duljina pravokutnika opsega 54 cm, ako je njegova širina 12 cm.

$$\begin{aligned}2a + 2 \cdot 12 &= 54 \\2a + 24 &= 54 \\2a &= 54 - 24 \\2a &= 30 \quad / :2 \\a &= 15\end{aligned}$$

Duljina pravokutnika je 15 cm.

SUSTAV DVIJU LINEARNIH JEDNADŽBI S DVJEMA NEPOZNANICAMA

Svaka jednađba oblika $ax+by=c$ ($a \neq 0, b \neq 0$) naziva se linearna jednađba s dvije nepoznanice.

Oblik $ax+by=c$ naziva se standardni oblik jednađbe s dvije nepoznanice.

X i y su oznake za te nepoznanice, a i b su odgovarajući koeficijenti uz te nepoznanice, c je slobodni član.

Rješenje linearne jednađbe s dvije nepoznanice je svaki uređeni par brojeva (x,y) koji uvršten u tu jednađbu daje točnu jednakost.

Linearna jednađba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja tj. uređenih parova (x,y) koji je zadovoljavaju.

Primjer:

Napiši tri uređena para (x,y) koji zadovoljavaju jednađbu $-2x+3y=4$.

Rješenje :

$$(-2,0), \quad \left(6, \frac{16}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{3}\right), \dots\dots\dots$$

$$-2 \cdot (-2) + 3y = 4 \quad -2 \cdot 6 + 3y = 4 \quad -2 \cdot \frac{1}{2} + 3y = 4$$

$$4 + 3y = 4 \quad -12 + 3y = 4 \quad -1 + 3y = 4$$

$$3y = 4 - 4 \quad 3y = 4 + 12 \quad 3y = 4 + 1$$

$$3y = 0 \quad 3y = 16 \quad 3y = 5$$

$$y = 0 \quad y = \frac{16}{3} \quad y = \frac{5}{3}$$

Ima **beskonačno mnogo** uređenih parova (x,y) koji su rješenja zadane jednađbe . Određujemo ih tako da za x ili y odaberemo bilo koji racionalni broj , uvrstimo ga u zadanu jednađbu i izračunamo y ili x .

Sustav dviju linearnih jednađbi s dvjema nepoznanicama x i y u standardnom obliku pišemo:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}$$

Sustav dvije linearne jednađbe s dvije nepoznanice ima jedinstveno rješenje , uređeni par (x,y) koji zadovoljava i jednu i drugu jednađbu ako je $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$.

METODA SUPSTITUCIJE

je jedna od metoda kojom nalazimo rješenje sustava (x,y) .

Koraci pri rješavanju:

1. Iz jedne jednadžbe izrazimo jednu nepoznanicu pomoću druge .
2. Dobiveni izraz uvrstimo (supstituiramo) u drugu jednadžbu .
3. Riješimo dobivenu linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom .
4. Dobivenu vrijednost nepoznanice uvrstimo u jednadžbu odabranu na početku te odredimo vrijednost druge nepoznanice .
5. Provjerimo zadovoljavaju li vrijednosti nepoznanica polazne jednadžbe .
6. Ako su obje polazne jednadžbe zadovoljene, istaknemo rješenje , a ako nisu, tražimo pogrešku .

Primjer:

$x+5y=-7$	$\Rightarrow x = -7-5y$	provjera:
$2x+y=4$	$x = -7-5(-2)$	$3+5(-2) = -7$
<hr/>	$x = -7+10$	$3-10 = -7$
$2(-7-5y)+y = 4$	$x = 3$	$-7 = -7$
$-14-10y+y = 4$		$2 \cdot 3 + (-2) = 4$
$-10y+y = 4+14$		$2 \cdot 3 - 2 = 4$
$-9y = 18$		$6 - 2 = 4$
$y = 18 : (-9)$		$4 = 4$
$y = -2$		

Uređeni par **(3,-2)** rješenje je zadanog sustava.

METODA SUPROTHNIH KOEFICIJENATA

je druga metoda kojom nalazimo rješenje sustava (x,y) .

Koraci pri rješavanju:

1. Odaberemo jednu nepoznanicu x ili y, pomnožimo jednu ili obje jednadžbe brojevima tako da se uz odabranu nepoznanicu dobiju suprotni koeficijenti .
2. Zbrajanjem jednadžbi elimineramo jednu nepoznanicu uz koju su suprotni koeficijenti .
3. Riješimo dobivenu jednadžbu s jednom nepoznanicom .
4. Dobivenu vrijednost nepoznanice uvrstimo u bilo koju jednadžbu sustava pa izračunamo vrijednost druge nepoznanice.
5. Provjerimo zadovoljavaju li vrijednosti dobivenih nepoznanica zadane jednadžbe .
6. Ako su obje polazne jednadžbe zadovoljene, istaknemo rješenje , a ako nisu, tražimo grešku .

Primjer:

$$\begin{array}{rcl} 2x+7y=13 \cdot 3 & \Rightarrow & 2 \cdot 3+7y=13 \\ \underline{5x-3y=12 \cdot 7} & & 6+7y=13 \\ 6x+21y=39 &] + & 7y=13-6 \\ \underline{35x-21y=84} & & 7y=7 \\ 41x=123 & & y=\frac{7}{7} \\ x=\frac{123}{41} & & y=1 \\ x=3 & & \end{array}$$

$$(x,y)=(3,1)$$

provjera:

$$\begin{array}{rcl} 2 \cdot 3+7 \cdot 1=13 & 5 \cdot 3-3 \cdot 1=12 \\ 6+7=13 & 15-3=12 \\ 13=13 & 12=12 \end{array}$$

Uređeni par (3,1) je rješenje zadanog sustava.

Primjer:

Svedi na standardni oblik, a zatim riješi sustav :

$$\begin{array}{rcl} \frac{5-2x}{3} + \frac{7y+1}{5} = 2 / \cdot 15 & & \\ \underline{\frac{-3x+4}{4} - \frac{4-6y}{8} = -1 / \cdot 8} & & \\ 5(5-2x) + 3(7y+1) = 30 & & \\ \underline{2(-3x+4) - (4-6y) = -8} & & \\ 25-10x+21y+3=30 & & \\ \underline{-6x+8-4+6y=-8} & & \\ -10x+21y=30-25-3 & & \\ \underline{-6x+6y=-8-8+4} & & \\ -10x+21y=2 / \cdot (-3) & & \\ \underline{-6x+6y=-12 / \cdot 5} & \Rightarrow & -6x+6 \cdot 2=-12 \\ \left. \begin{array}{l} \cancel{30x} - 63y = -6 \\ \underline{\cancel{-30x} + 30y = -60} \end{array} \right\} & & -6x = -24 \\ -33y = -66 & & x = \frac{-24}{-6} \\ y = \frac{-66}{-33} & & x = 4 \\ y = 2 & & \text{Uređeni par}(4,2) \text{ je rješenje zadanog sustava.} \end{array}$$

Primjeri:

1. Razlika dvaju brojeva je 3, a drugi broj je $\frac{5}{6}$ prvog broja . Koji su to brojevi ?

$$x - y = 3 \rightarrow x - \frac{5}{6}x = 3 / \cdot 6$$

$$\underline{y = \frac{5}{6}x} \quad 6x - 5x = 18$$

$$x = 18$$

$$y = \frac{5}{\cancel{6}_1} \cdot \cancel{18}^3$$

$$y = 15 \quad (18, 15)$$

Traženi brojevi su 18 i 15 .

2. Zbroj dvaju brojeva je 66. Jedan od njih je 20% drugog . Koji su to brojevi?

$$x + y = 66$$

$$\underline{x = 20\% \cdot y}$$

$$x + y = 66 \rightarrow 0.2y + y = 66$$

$$\underline{x = 0.2y} \quad 1.2y = 66$$

$$x = 0.2 \cdot 55 \quad y = \frac{66}{1.2}$$

$$x = 11 \quad y = 55 \quad (11, 55)$$

Traženi brojevi su 11 i 55 .

3. Zbroj znamenke desetica i znamenke jedinica dvoznamenkastog broja jest 9. Razlika zadanog broja i broja napisanog istim znamenkama u obrnutom redoslijedu također je 9. Koji je to broj?

znamenka desetica - x

znamenka jedinica - y

$$x + y = 9 \quad \rightarrow \quad 5 + y = 9$$

$$\underline{10x + y - (10y + x) = 9} \quad y = 9 - 5$$

$$x + y = 9 \quad y = 4$$

$$\underline{10x + y - 10y - x = 9} \quad (5, 4)$$

$$x + y = 9 / \cdot 9$$

$$\underline{9x - 9y = 9} \quad \text{Traženi broj je 54.}$$

$$\left. \begin{array}{l} 9x + \cancel{9y} = 81 \\ 9x - \cancel{9y} = 9 \end{array} \right\} +$$

$$\underline{18x = 90}$$

$$x = \frac{90}{18}$$

$$x = 5$$

OMJER I RAZMJER (PROPORCIJA)

Omjer

Omjer dvaju brojeva a i b , $b \neq 0$ količnik je tih brojeva i označavamo s $a:b$ ili $\frac{a}{b}$.

$a:b = \frac{a}{b}$ čitamo : „a prema b“

Vrijednost omjera se ne mijenja ako oba člana pomnožimo ili podijelimo istim brojem.

$$14:8=7:4$$

$$3:5=12:20$$

Razmjer (proporcija)

Razmjer (proporcija) je jednakost dvaju omjera.

Unutarnji članovi razmjera

$$\begin{array}{c} \wedge \\ a:b = c:d \\ \vee \end{array}$$

Vanjski članovi razmjera

Umnožak vanjskih članova razmjera jednak je umnošku unutarnjih članova.

Npr. Odredi x iz razmjera:

a) $3:x = 6:18$

$$6 \cdot x = 3 \cdot 18$$

$$x = \frac{3 \cdot 18}{6}$$

$$x = 9$$

b) $\frac{x+2}{3} = \frac{x}{5}$

$$5(x+2) = 3x$$

$$5x+10 = 3x$$

$$5x-3x = -10$$

$$2x = -10$$

$$x = -\frac{10}{2}$$

$$x = -5$$

PROPORCIONALNE VELIČINE

Veličine su proporcionalne ako vrijedi: ako se jedna veličina n puta poveća, onda će se i druga veličina n puta povećati ili ako se jedna veličina n puta smanji, onda će se i druga veličina n puta smanjiti.

Primjer :

Krojač za 5 istih odijela treba 16m platna. Koliko platna treba za 7 takvih odijela ?

m platna	broj odijela
16	5
x	7

broj odijela(x)	m platna (y)
5	16
7	?

$$x : 16 = 7 : 5$$

$$5 \cdot x = 16 \cdot 7$$

$$X = \frac{16 \cdot 7}{5}$$

$$X = \frac{112}{5}$$

$$X = 22.4 \text{ m}$$

$$k = \frac{y}{x}$$

$$y = k \cdot x$$

ili

$$k = \frac{16}{5}$$

$$y = 3.2 \cdot 7 \text{ m}^2$$

$$y = 22.4 \text{ m}^2$$

$$k = 3.2 \text{ m/odijelu}$$

k je koeficijent proporcionalnosti (broj metara platna za 1 odijelo)

O: Za 7 takvih odijela potrebno je 22.4 m platna.

Koliko se puta povećao broj odijela, toliko se puta povećao broj metara platna.

Primjer :

Aparat za umnožavanje za 4 minute preslika 240 stranica.

Za koje će vrijeme aparat preslikati 300 stranica?

4 min	240 stranica
x	300 stranica

vrijeme u min.(x)	broj stranica(y)
4	240
x	300

$$k = \frac{y}{x}$$

$$x : 4 = 300 : 240$$

$$k = \frac{240}{4}$$

$$240 \cdot x = 4 \cdot 300$$

ili

$$k = 60 \text{ stranica/minuti}$$

$$x = \frac{4 \cdot 300}{240}$$

$$x = \frac{y}{k}$$

$$x = 5 \text{ minuta}$$

$$x = \frac{300}{60}$$

$$x = 5 \text{ minuta}$$

Ako su dvije veličine y i x proporcionalne, onda je omjer njihovih vrijednosti uvijek isti.

Taj omjer naziva se koeficijent proporcionalnosti i označava se slovom $k = \frac{y}{x}$.

Primjer :

Dopuni tablicu: Jedna čokolada košta 4 kune.

x (broj čokolada)	y(iznos u kn)
<u>1</u>	<u>4</u>
?(2)	<u>8</u>
?(3)	<u>12</u>
<u>4</u>	?(16)
<u>5</u>	?(20)

$$k = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \dots = \frac{y}{x}$$

Koeficijent proporcionalnosti – stalna veličina

Primjer :

Dva prijatelja, Ivan i Matej igrali su loto. Ivan je uložio 12 kuna, a Matej 9 kuna. Kako će podijeliti dobitak od 609 kuna ako ga žele podijeliti u omjeru uloženog novca?

$$\begin{array}{l}
 I+M = 609 \\
 I : M = 12:9 \\
 \hline
 I+M = 609 \\
 12k+9k=609 \\
 k = \frac{609}{21} \\
 k=29
 \end{array}
 \Rightarrow
 \begin{array}{l}
 I = 12k = 12 \cdot 29 = 348 \\
 M = 9k = 9 \cdot 29 = 261
 \end{array}$$

OBRNUTO PROPORCIONALNE VELIČINE

Veličine su obrnuto proporcionalne ako vrijedi: ako se jedna veličina n puta poveća, onda će se druga veličina n puta smanjiti i obrnuto.

Primjer 1:

Soboslikar je završio posao za 9 dana radeći dnevno 4 sata. Za koliko bi dana završio taj posao da je radio 12 sati dnevno ?

↓	9 dana	4 sata dnevno	↑
	x	12 sati dnevno	

x (broj dana)	y (sati)
9	4
x	12

$$9 : x = 12 : 4$$

$$12x = 9 \cdot 4$$

$$x = 3 \text{ dana}$$

$$k = x \cdot y$$

$$k = 36 \text{ (broj radnih dana ako dnevno radi 1 sat)}$$

$$x = \frac{k}{y}$$

$$x = \frac{36}{12}$$

$$x = 3 \text{ dana}$$

O: Soboslikar završi posao za 3 dana ako dnevno radi 12 sati .

Primjer2 :

Zrakoplov vozi brzinom 380 km/h i određenu udaljenost prijeđe za 5 sati. Za koliko će sati prijeći istu tu udaljenost ako vozi brzinom od 500 km/h ?

↓	380 km/h	5 sati	↑
	500 km/h	x sati	

$$x : 5 = 380 : 500$$

$$x \cdot 500 = 5 \cdot 380$$

$$x = \frac{5 \cdot 380}{500}$$

$$x = \frac{19}{5} \text{ h}$$

$$x = 3.8 \text{ h}$$

$$k = x \cdot y$$

$$k = 380 \cdot 5$$

$$k = 1900 \text{ km}$$

$$x = \frac{k}{y}$$

$$x = \frac{1900}{500} \text{ h}$$

$$x = 3.8 \text{ h}$$

$$x = 3 \text{ h i } 48 \text{ min}$$

$$\mathbf{3.8 \text{ h} = 3 \text{ h } 48 \text{ min. } \quad 0.8\text{h} = 0.8 \cdot 60 \text{ min.} = 48 \text{ min.}}$$

Odgovor:

Ako vozi brzinom od 500 km/h, istu udaljenost će prijeći za 3 h i 48 min .

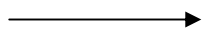
Iz zadatka je vidljivo - koliko se puta jedna veličina smanjila, toliko se puta druga veličina povećala .

Primjer :

Neki se posao obavi za 36 dana radeći dnevno 1 sat.

Dopuni tablicu:

x	y
Broj sati rada dnevno	Broj dana
1	36
4	?(9)
?(12)	3



$$k = x \cdot y$$

$$k = 1 \cdot 36 = 4 \cdot 9 = 12 \cdot 3 = \dots = x \cdot y$$

Koeficijent obrnute proporcionalnosti je stalna veličina.

POSTOTAK

Postotak je **RAZLOMAK** s nazivnikom 100.
Zapisuje se na sljedeći način :

$$P\% = \frac{P}{100}$$

Npr: $3\% = \frac{3}{100}$

Postotke možemo izraziti u obliku:

- Razlomka
- Decimalnog broja

Primjer:

$$35\% = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$$

$$35\% = \frac{35}{100} = 0.35$$

U postotnom računu koristimo sljedeće veličine :

y-postotni iznos
x-osnovna vrijednost
p-postotak

Pa je $y = p\% \cdot x$

Koristeći se postotnim računom ,možemo riješiti mnoge probleme iz svakodnevnice:

Primjeri :

1. Škola ima 600 učenika od kojih 7% trenira košarku:
Koliko učenika u toj školi trenira košarku?

$$\begin{aligned} &7\% \text{ od } 600 \\ &7\% \cdot 600 = \\ &= 0.07 \cdot 600 = \\ &= 42 \end{aligned}$$

Odgovor: 42 učenika te škole trenira košarku.

2. Neka vreća puna voća sadrži 80% jabuka. Koliko je kg jabuka u vreći ako je ukupno 100 kg voća?

$$\begin{aligned}x &= 100 \text{ kg} \\ p\% &= 80\% \\ y &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= p\% \cdot x \\ y &= 80\% \cdot 100 \\ y &= 0.8 \cdot 100 \\ y &= 80 \text{ kg}\end{aligned}$$

Odgovor: U vreći je 80 kg jabuka.

3. Na ispitu iz matematike Ivan je realizirao 20 bodova od moguća 32 boda. Koliki je postotak Ivanove uspješnosti na tom ispitu?

$$\begin{aligned}x &= 32 \\ y &= 20 \\ p\% &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y &= p\% \cdot x \\ 20 &= p\% \cdot 32 \\ p\% &= \frac{20}{32} = 0.625 \\ p\% &= 62.5\%\end{aligned}$$

Odgovor: Ivanova uspješnost na tom ispitu je 62.5% .

4. Nakon 20% poskupljenja cijena nekog proizvoda je 336 kn. Kolika je bila cijena tog proizvoda prije poskupljenja?

$$\begin{aligned}p\% &= 100\% + 20\% = 120\% \\ y &= 336 \\ x &= ?\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= p\% \cdot x \\ 336 &= 120\% \cdot x \\ 336 &= 1.2 \cdot x \\ x &= \frac{336}{1.2} \text{ kn} \\ x &= 280 \text{ kn}\end{aligned}$$

2. način rada

$$\begin{aligned}x + 20\% \cdot x &= 336 \\ x + 0.2 \cdot x &= 336 \\ 1.2 x &= 336 \\ x &= \frac{336}{1.2} \\ x &= 280 \text{ kn}\end{aligned}$$

Cijena prije poskupljenja je bila 280 kn.

JEDNOSTAVNI KAMATNI RAČUN

Uz godišnju stopu (s) i uz uloženu glavnica(g), nakon vremena(v) dobiju se kamate(k), čiji iznos računamo po formuli jednostavnog kamatnog računa:

$$k = s \cdot g \cdot v$$

Vrijeme štednje(v) izražava se u **godinama**.

Kamate su proporcionalne sa kamatnom stopom, glavnicom i vremenom.

Primjeri:

1. Koliku kamatu godišnje donese glavnica od 10000 kn uz kamatnu stopu od 7% ?

$$s = 7\%$$

$$v = 1 \text{ god}$$

$$k = ?$$

$$k = s \cdot g \cdot v$$

$$k = 7\% \cdot 10\,000 \cdot 1 \text{ kn}$$

$$k = 0.07 \cdot 10\,000 \text{ kn}$$

$$k = 700 \text{ kn}$$

O: Godišnja kamata je 700 kn.

2. Koja glavnica uložena uz kamatnu stopu od 7.5% na 18 mjeseci donese 2025 kn kamate ?

$$s = 7.5\%$$

$$v = 18 \text{ mj} = 1.5 \text{ g}$$

$$k = 2025 \text{ kn}$$

$$g = ?$$

$$k = s \cdot g \cdot v$$

$$2025 = 7.5\% \cdot g \cdot 1.5$$

$$2025 = 0.075 \cdot g \cdot 1.5$$

$$2025 = 0.1125 \cdot g$$

$$g = \frac{2025}{0.1125} \text{ kn}$$

$$g = 18000 \text{ kn}$$

O: Glavnica je 18000 kn.

3. Koliko vremena mora biti uložena glavnica od 8500 kuna uz kamatnu stopu od 10% ako želimo dobiti 4250 kuna kamate?

$$g = 8500 \text{ kn}$$

$$s = 10\%$$

$$k = 4\,250 \text{ kn}$$

$$v = ?$$

$$k = s \cdot g \cdot v$$

$$4250 = 10\% \cdot 8500 \cdot v$$

$$4250 = 850 \cdot v$$

$$v = \frac{4250}{850} \text{ godina}$$

$$v = 5 \text{ godina}$$

O: Glavnica mora biti uložena na 5 godina.

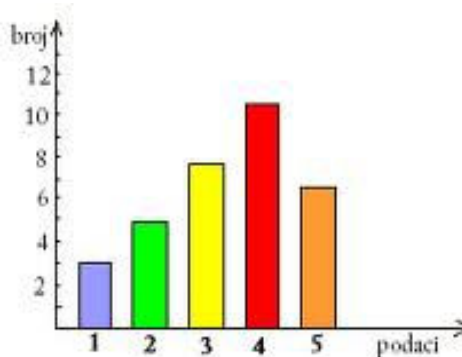
STATISTIKA

- Grana matematike.
- Bavi se prikupljanjem i obradom podataka .
- Podatke možemo prikazati na razne načine: tabličnim prikazom, slikovnim prikazom, stupčastim dijagramom, kružnim dijagramom i linijskim dijagramom.

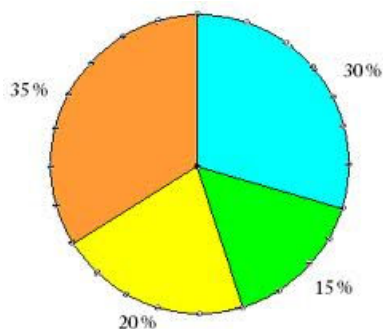
Tablica 3. Pokazatelji proizvodnje mlijeka.

Godina	Broj isporučitelja	Broj mliječnih krava	Mlijeko		
			Količina (kg)	Indeks (2003=100)	Isporuka po isporučitelju
2003	58.815	223.954	540.798.806	100,00	9.195
2004	53.622	229.042	548.827.100	101,48	10.235
2005	48.652	231.833	623.913.775	115,37	12.824
2006	40.387	238.050	650.503.424	120,29	16.107
2007	33.253	239.336	673.466.516	124,53	20.253
2008	28.102	234.871	657.753.865	121,63	23.406
2009	20.548	226.000	675.289.053	124,86	32.897
2010*	17.469	-	433.126.806	-	35.870

*prvih 8 mjeseci



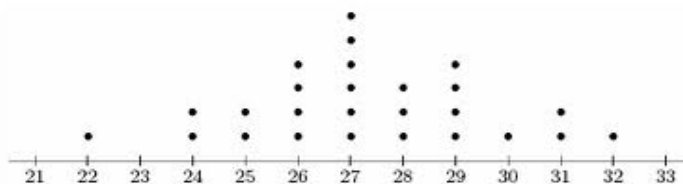
TABLIČNI PRIKAZ STUPČASTI DIJAGRAM



KRUŽNI DIJAGRAM



LINIJSKI DIJAGRAM



SLIKOVNI PRIKAZ

OBILJEŽJE SKUPA

- Kriteriji po kojima objekte razvrstavamo u različite skupine.

FREKVENCIJA

- Frekvencija je broj (puta) pojavljivanja određene vrijednosti u obilježju skupa.

RELATIVNA FREKVENCIJA

- Omjer frekvencije i zbroja frekvencija.

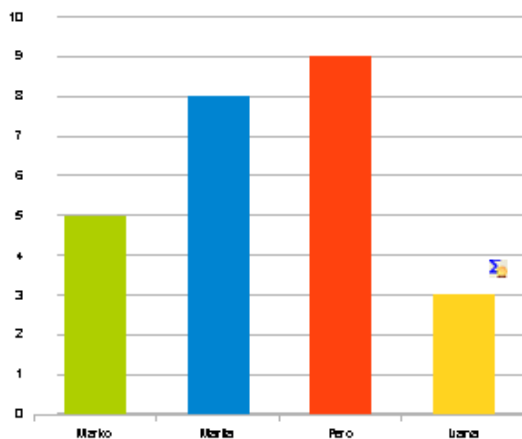
$$\text{relativna frekvencija} = \frac{\text{frekvencija}}{\text{zbroj frekvencija}}$$

- Relativnu frekvenciju izražavamo u postocima.

npr. Izbor predsjednika 8.d razreda

Obilježje skupa	Frekvencija	Relativna frekvencija
Marko	5	$5/25=0.20=0.20 \cdot 100\%=20\%$
Marija	8	$8/25=0.32=0.32 \cdot 100\%=32\%$
Pero	9	$9/25=0.36=0.36 \cdot 100\%=36\%$
Ivana	3	$3/25=0.12=0.12 \cdot 100\%=12\%$
Ukupno:	25	100%

- Stupčastim i kružnim dijagramom lakše očitavamo podatke.



$$\frac{\text{frekvencija}}{\text{zbroj frekvencija}} \cdot 360^\circ$$

$$\frac{2}{5} \cdot 360^\circ = \left(\frac{720}{5} \right)^\circ = 144^\circ$$

Primjer:

VOĆE	FREKVENCIJA(u kg)
jabuka	26
kruška	14
jagoda	20
šljiva	8
grožđe	12
breskva	10

U tablici su prikazani prikupljeni podaci o količini prodanog voća u jednoj voćarnici.

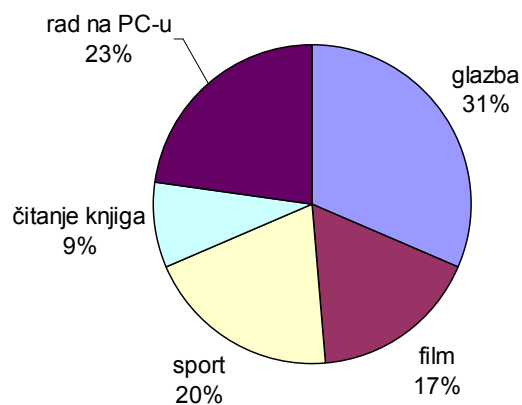
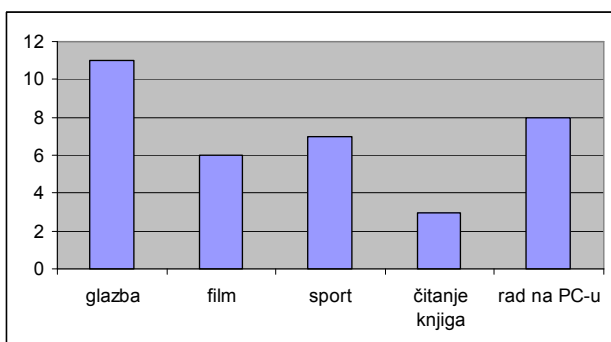
- Prikupljene podatke prikaži tablicom relativnih frekvencija.
- Nacrtaj stupčasti dijagram.
- Koje je voće najprodavanije?



Primjer: U 1.a razredu prikupljeni su podaci o hobijima.

- Prikupljene podatke prikaži tablicom relativnih frekvencija.
- Nacrtaj stupčasti dijagram.
- Nacrtaj kružni dijagram.

VRSTE HOBIJA	FREKVENCIJE	RELATIVNE FREKVENCIJE
glazba	11	$\frac{11}{35} = 0.31 = 31\%$
film	6	$\frac{6}{35} = 0.17 = 17\%$
sport	7	$\frac{7}{35} = 0.2 = 20\%$
čitanje knjiga	3	$\frac{3}{35} = 0.09 = 9\%$
rad na PC-u	8	$\frac{8}{35} = 0.23 = 23\%$
UKUPNO:	35	1 = 100%



VJEROJATNOST

Izrazi koje koristimo za vjerojatnost nekog događaja su : vjerojatno, sigurno, gotovo nemoguće, pola / pola ...

Siguran događaj ima vjerojatnost $100\% = 1$.

Na pola vjerojatan događaj ima vjerojatnost $50\% = \frac{1}{2} = 0.5$.

Nemoguć događaj ima vjerojatnost **0%**.

Vjerojatnost nekog događaja je broj između 0 i 1.

Vjerojatnost označavamo slovom **P**.

P(A)-vjerojatnost da će se zbiti događaj **A**.

Primjer: Izvlačenje kuglica različitih boja iz vrećice

Kod izvlačenja kuglice iz vrećice rezultat jednog izvlačenja naziva se **elementarni događaj**.

Kako računamo vjerojatnost da će iz vrećice biti izvučena kuglica određene boje :

$$P_{(\text{neka boja})} = \frac{\text{Broj kuglica te boje}}{\text{Ukupan broj svih kuglica}}$$

$$P_{(A)} = \frac{\text{Broj elementarnih događaja povoljnih za A}}{\text{Ukupan broj svih elementarnih događaja}}$$

Primjer:

Slova riječi MATEMATIKA napisana su na deset kartica, a kartice su zatim promiješane i okrenute slovima na dolje.

a) Imaju li sva slova jednake izgleda da budu okrenuta?
Nemaju.

b) Kolika je vjerojatnost da na izvučenoj kartici piše slovo A?

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\% \quad \text{Vjerojatnost da ćemo izvući slovo A je 30\%}$$

c) Kolika je vjerojatnost da na izvučenoj kartici piše slovo M?

$$P(M) = \frac{2}{10} = 0.2 = 20\% \quad \text{Vjerojatnost da ćemo izvući slovo M je 20\%}$$

d) Kolika je vjerojatnost da na izvučenoj kartici piše slovo K?

$$P(K) = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\% \quad \text{Vjerojatnost da ćemo izvući slovo K je 10\%}$$

e) Kolika je vjerojatnost da na izvučenoj kartici piše slovo N?

$P(N) = \frac{0}{10} = 0 = 0\%$ Vjerojatnost da ćemo izvući slovo N je 0%.

f) Kolika je vjerojatnost da na izvučenoj kartici pišu slova T ili I?

$P(T \text{ ili } I) = \frac{3}{10} = 0.3 = 30\%$ Vjerojatnost da ćemo izvući slovo T ili I je 30%.

GEOMETRIJA

Dužina, pravac, polupravac

Ravnina je ravna neomeđena ploha.
Najmanji dio ravnine je točka.
Točke imenujemo velikim tiskanim slovima osim Č, Ć, Š, Ž, Đ, DŽ, Lj, Nj.



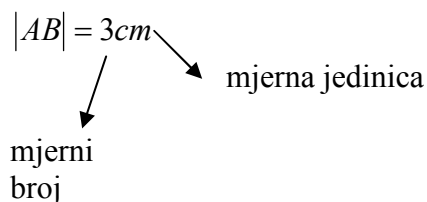
Dužina je omeđena ravna crta.
Dužina je najkraća spojnica dviju točaka.
Krajnje točke su točke kojima je omeđena dužina.



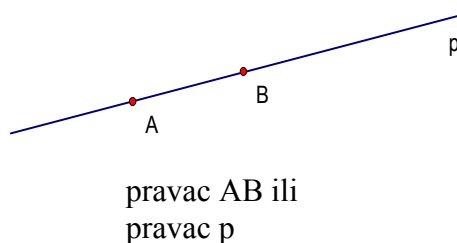
Duljina dužine je udaljenost između krajnjih točaka dužine.

Duljinu dužine \overline{AB} označavamo $|AB|$.

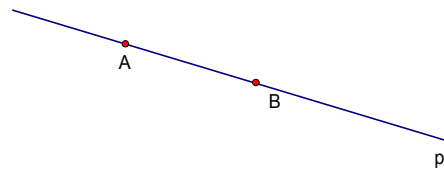
Za mjerenje dužine izaberemo najpogodniju mjernu jedinicu, primjerice m, dm, cm, mm.



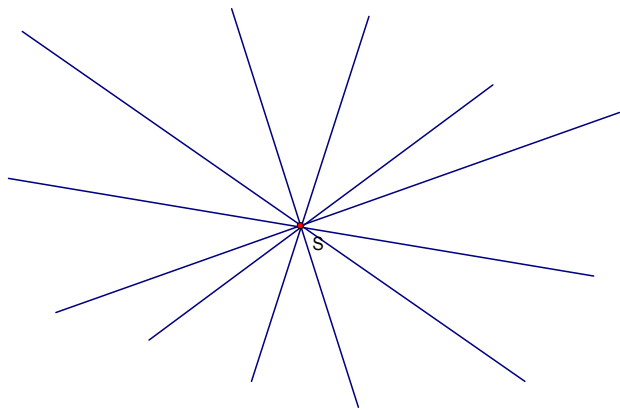
Pravac je ravna crta neomeđena s obje strane.
Pravce bilježimo malim slovima.
Za točke koje pripadaju pravcu još kažemo da leže na pravcu ili da pravac njima prolazi.



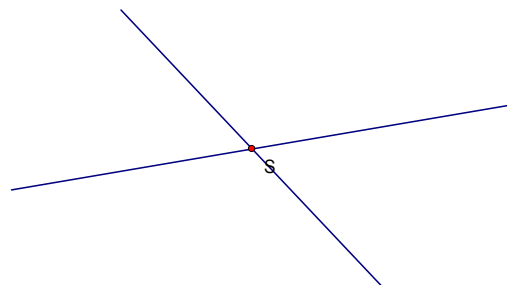
Kroz dvije točke, A i B, možemo povući točno jedan pravac.



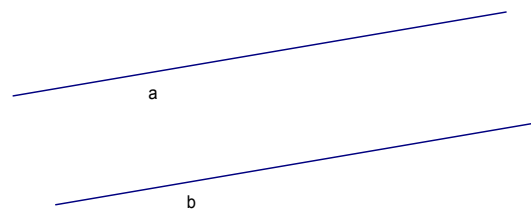
Kroz jednu točku možemo povući beskonačno mnogo pravaca. Pramen pravaca je skup svih pravaca koji imaju jednu zajedničku točku.



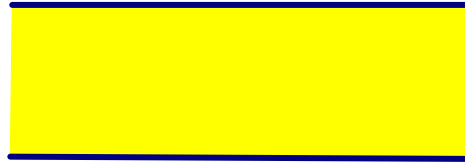
Zajedničku točku dvaju pravaca zovemo njihovim (pre)sjecištem.



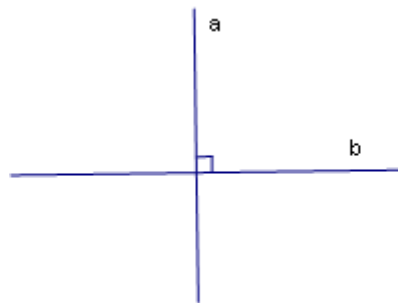
Ako se pravci a i b ne sijeku, tada kažemo da su usporedni ili paralelni i pišemo $a \parallel b$.



Dio ravnine između dva paralelna pravca zovemo PRUGA.



Pravci a i b su okomiti ako se sijeku tako da ravninu dijele na četiri međusobno jednaka dijela. Pišemo $a \perp b$.



Polupravac je ravna crta koja je s jedne strane omeđena, a s druge strane nije.



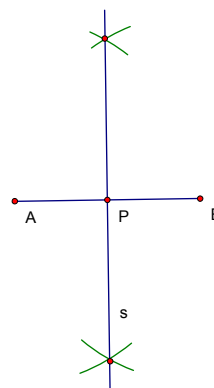
polupravac VA
ili polupravac p

Polupravac označavamo malim latiničnim slovima ili s dva tiskana slova kojima smo imenovali početnu točku i točku kroz koju prolazi taj polupravac.

Simetrala dužine

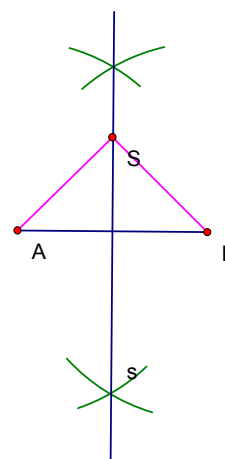
Simetrala dužine je pravac koji je okomit na dužinu i dijeli je na dva jednaka dijela.

Polovište dužine je točka koja dužinu dijeli na dva jednaka dijela. Polovište je sjecište dužine i njezine simetrale.

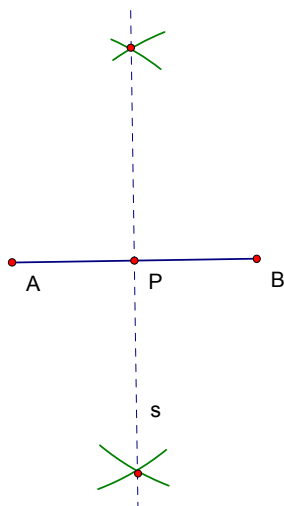


Svaka točka na simetrali dužine jednako je udaljena od krajnjih točaka te dužine. Svaka točka koja je jednako udaljena od krajnjih točaka te dužine leži na njezinoj simetrali.

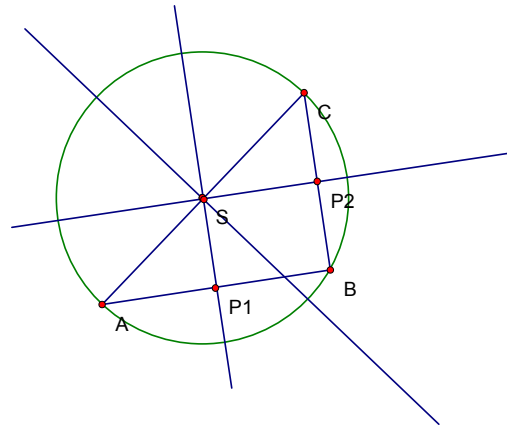
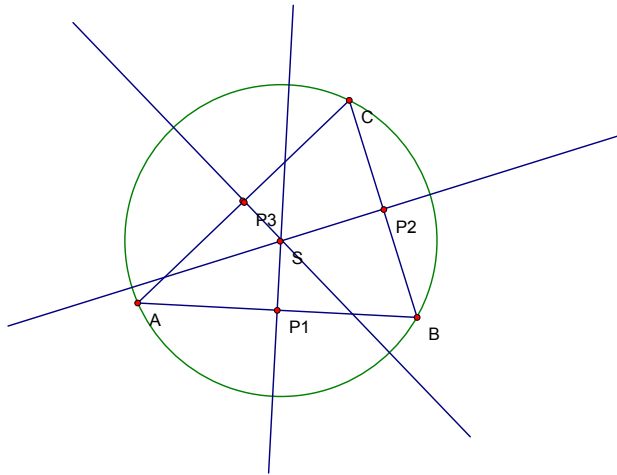
$$|SA| = |SB|$$



Primjer: Nacrtaj dužinu, a zatim bez mjerenja odredi njezino polovište.



Primjer:

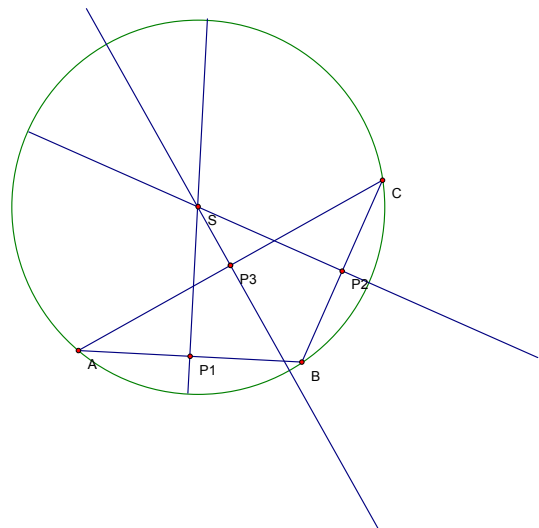


S-sjecište simetrala stranica

$|SA|=|SB|=|SC|$, pa kružnica sa središtem u S i radijusom $|SA|$ prolazi kroz sve vrhove trokuta

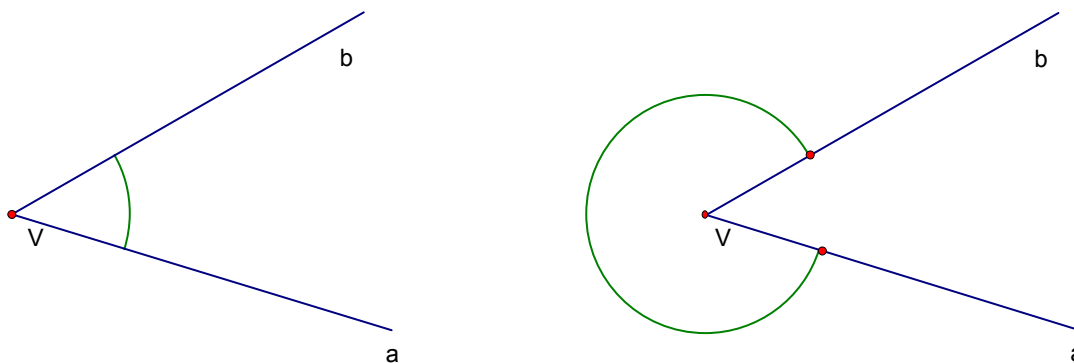
ABC. To je tom trokutu **opisana kružnica**.

Središte opisane kružnice šiljastokutnog trokuta je unutar trokuta, tupokutnog trokuta izvan trokuta, a pravokutnog je u polovištu hipotenuze.



Kut i mjerenje kuta

Kut je dio ravnine omeđen dvama polupravcima sa zajedničkom početnom točkom.



Zajedničku početnu točku polupravaca zovemo vrh kuta (V).

Svaki od polupravaca koji omeđuju kut zovemo krak kuta.

Točke koje pripadaju krakovima kuta nazivamo rubne točke kuta, a ostale točke kuta unutarnje točke kuta.

Kutomjer je naprava za mjerenje kutova.

Veličinu kuta mjerimo u stupnjevima.

Osnovna jedinica za mjerenje kuta je jedan kutni stupanj.

To je veličina kuta koji je tristošezdeseti dio punog kuta, odnosno devedeseti dio pravog kuta.

Oznaka za jedan kutni stupanj je 1° .

Za preciznija mjerenja potrebne su nam i manje mjere.

Šezdeseti dio kutnog stupnja kutna je minuta, oznaka $1'$.

Dakle, $1^\circ = 60'$.

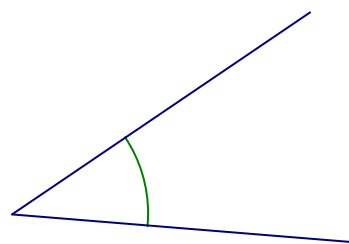
A opet, šezdeseti dio kutne minute kutna je sekunda, oznaka $1''$.

$1^\circ = 60'$ $1' = 60''$ $1^\circ = 3600''$.

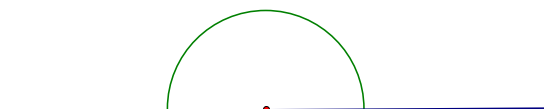
Pravi kut je kut čiji su kraci međusobno okomiti. Veličina pravoga kuta iznosi 90° .



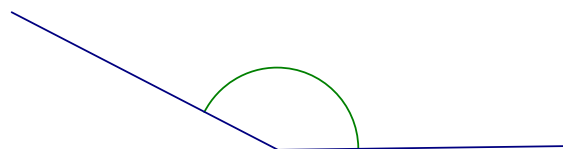
Šiljasti kut je kut manji od pravoga kuta.
Veličina šiljastog kuta iznosi manje od 90° .



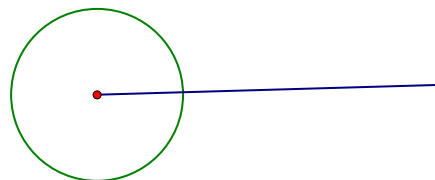
Ispruženi kut je kut čiji kraci čine jedan pravac.
Veličina ispruženog kuta iznosi 180° .



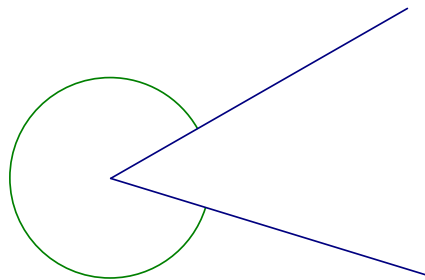
Tupi kut je kut veći od pravoga kuta, a manji od ispruženog. Veličina tupog kuta je manja od 180° , a veća od 90° .



Puni kut je kut koji je veći od ispruženoga kuta, a njegovi se kraci podudaraju.
Veličina punog kuta iznosi 360° .

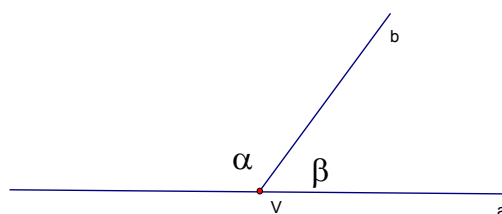


Izbočeni kut je kut koji je veći od ispruženog, a manji od punoga kuta. Veličina izbočenog kuta je manja od 360° , a veća od 180° .



Sukuti i vršni kutovi

Sukuti (susjedni kutovi) jesu dva kuta koji imaju jedan krak zajednički, a preostala dva kraka leže na istom pravcu. Zbroj veličina sukuta iznosi 180° .



$$\alpha, \beta = \text{sukuti}$$
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Primjer: . Ako je veličina jednog kuta 123° , kolika je veličina njegovog sukuta ?

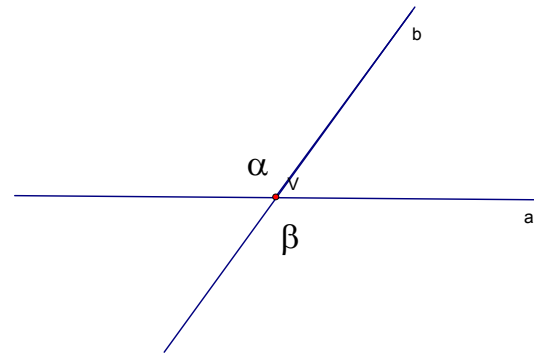
$$\underline{\alpha = 123^\circ}$$

$$\beta = ?$$

$$\beta = 180^\circ - 123^\circ$$

$$\beta = 57^\circ$$

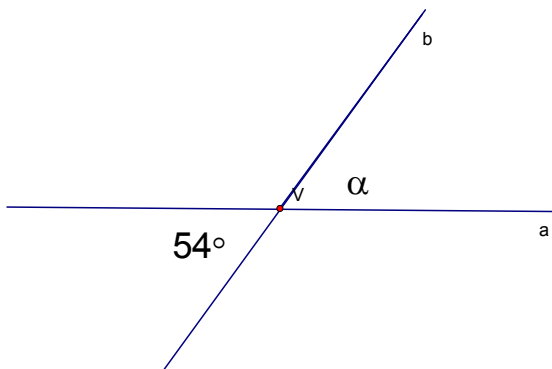
Vršni kutovi jesu dva kuta sa zajedničkim vrhom takvi da su krakovi jednog od njih suprotni polupravci krakova drugog kuta. Svaka dva pravca ravnine koja se sijeku određuju dva para vršnih kutova. Vršni kutovi međusobno su jednake veličine.



α , β -vršni kutovi

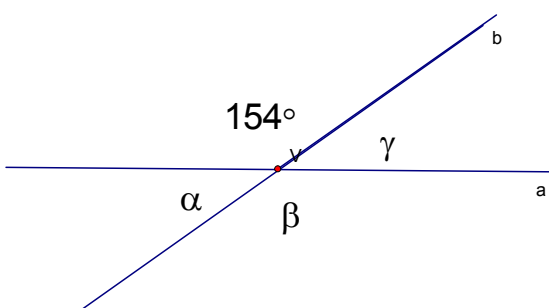
$$\alpha = \beta$$

Primjer: Odredi veličinu kuta sa slike !



$$\alpha = 54^\circ$$

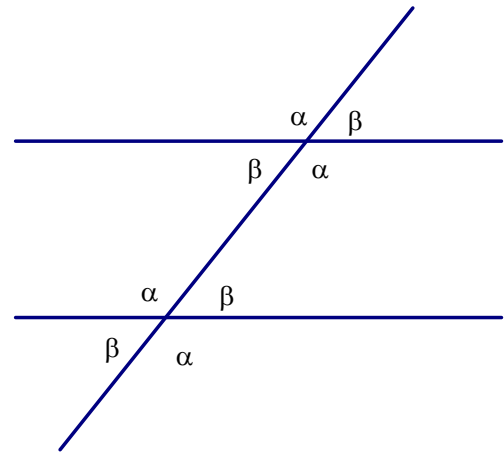
Primjer: Odredi veličinu nepoznatih kutova sa slike !



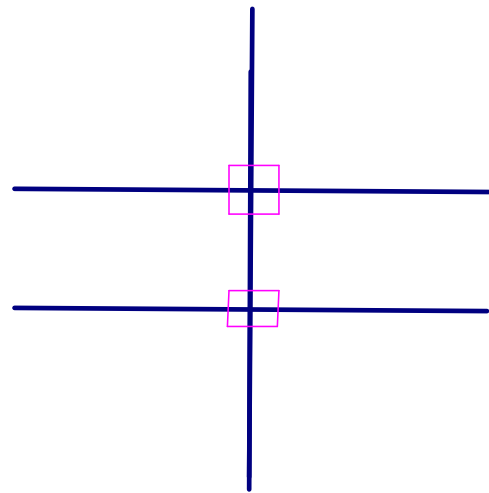
$$\begin{aligned} \beta &= 154^\circ \\ \alpha &= 180^\circ - 154^\circ \\ \alpha &= 26^\circ \\ \gamma &= 26^\circ \end{aligned}$$

Kutovi uz presječnicu usporednih pravaca

Pravac koji siječe dva usporedna pravca naziva se njihova PRESJEČNICA ili TRANSVERZALA. Usporedni pravci i njihova presječnica određuju 8 kutova, 4 šiljasta i 4 tupa. Kutovi iste vrste međusobno su jednaki. Kutovi različitih vrsta (jedan tupi, a drugi šiljasti) jesu SUPLEMENTARNI (zajedno daju 180°).

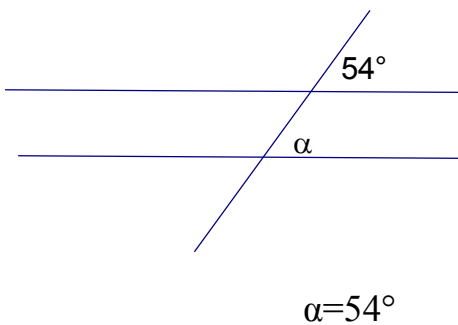


Ako je presječnica okomita na usporedne pravce, onda su svi ti kutovi pravi.

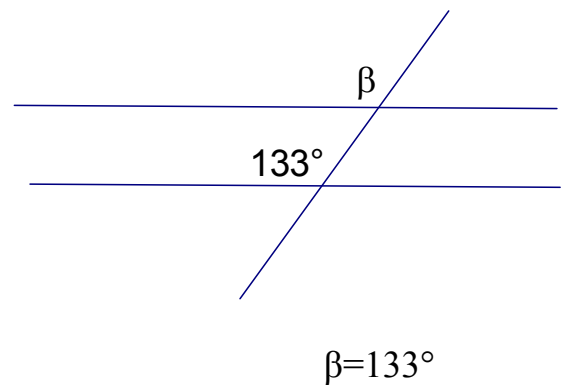


Primjer: Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike:

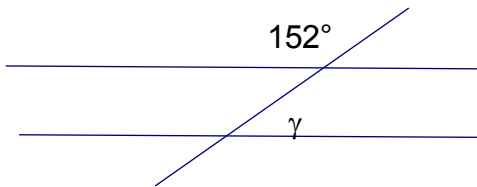
a)



b)

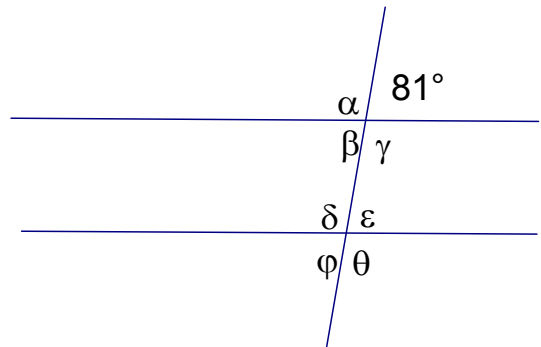


c)



$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - 152^\circ \\ \gamma &= 28^\circ \end{aligned}$$

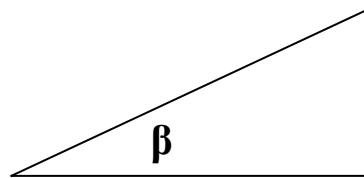
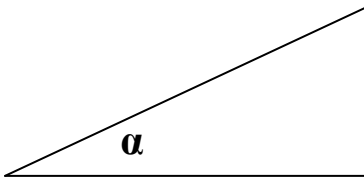
d)



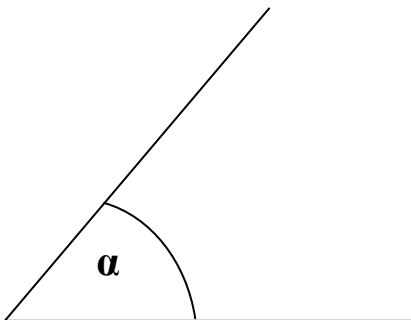
$$\begin{aligned} \beta = \phi = \epsilon &= 81^\circ \\ \alpha = \gamma = \delta = \theta &= 180^\circ - 81^\circ = 99^\circ \end{aligned}$$

Kutovi s usporednim i kutovi s okomitim kracima

Dva su kuta s međusobno usporednim kracima ili jednaka ili suplementarna. Ako su oba kuta iste vrste, ili oba šiljasta ili oba tupa, onda su jednaki. Ako su kutovi različitih vrsta (jedan šiljasti a drugi tupi), onda su suplementarni.

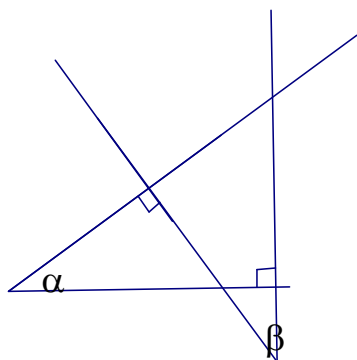


$$\alpha = \beta$$

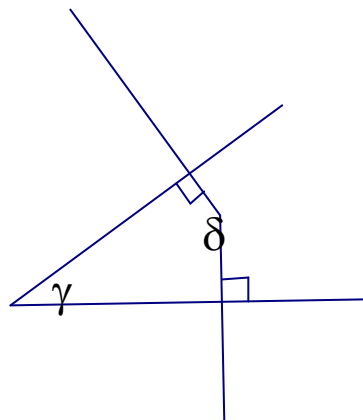


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Dva su kuta s međusobno okomitim kracima ili jednaka ili suplementarna.
 Ako su oba kuta iste vrste (oba šiljasta ili oba tupa), onda su oni jednaki. Ako su kutovi različitih vrsta (jedan šiljasti a drugi tupi), onda su suplementarni.



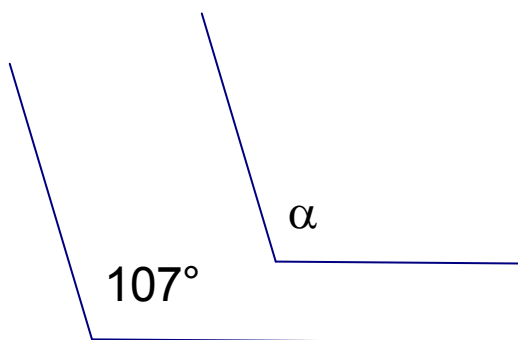
$$\alpha = \beta$$



$$\gamma + \delta = 180^\circ$$

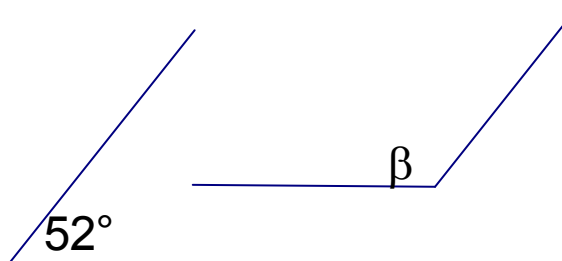
Primjer: Odredi veličine kutova α , β , γ i δ :

a)



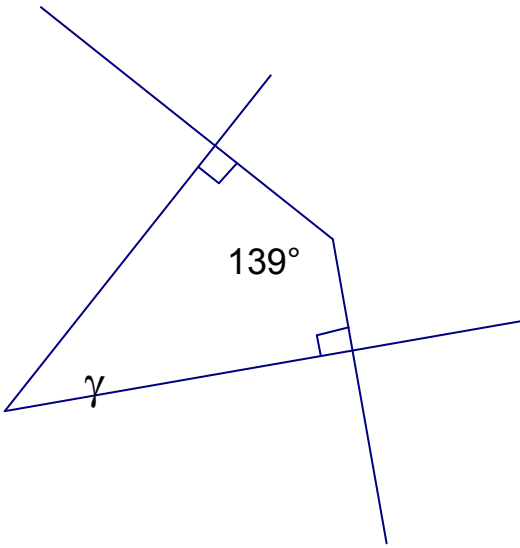
$$\alpha = 107^\circ$$

b)



$$\begin{aligned} \beta &= 180^\circ - 52^\circ \\ \beta &= 128^\circ \end{aligned}$$

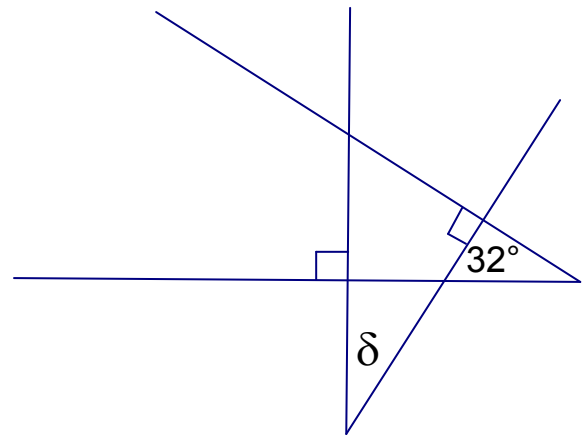
c)



$$\gamma = 180^\circ - 139^\circ$$

$$\gamma = 41^\circ$$

d)



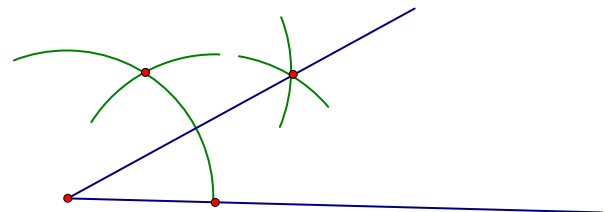
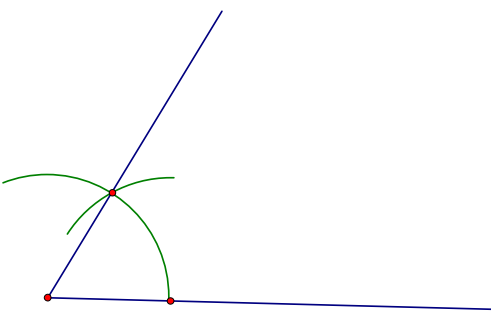
$$\delta = 32^\circ$$

Konstrukcija kuta

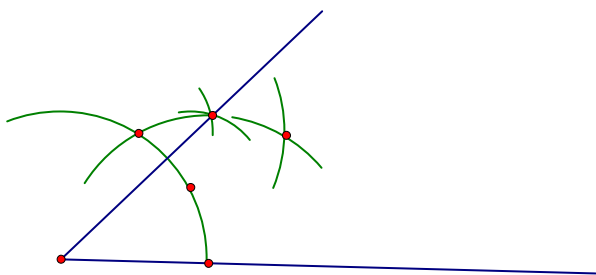
Konstruiraj kut od :

a) 60°

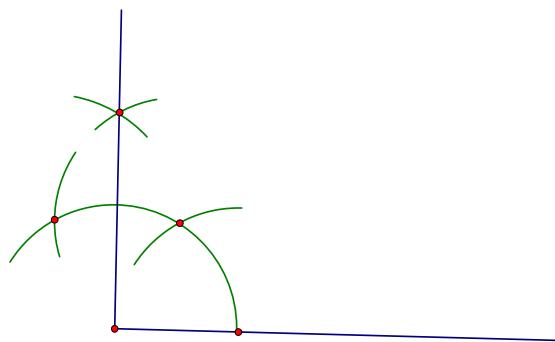
b) 30°



c) 45°

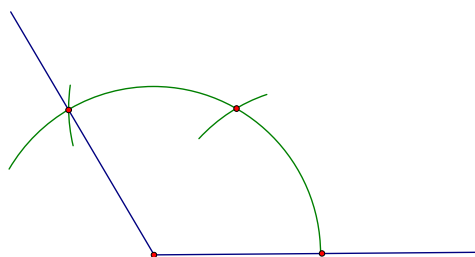


d) 90°

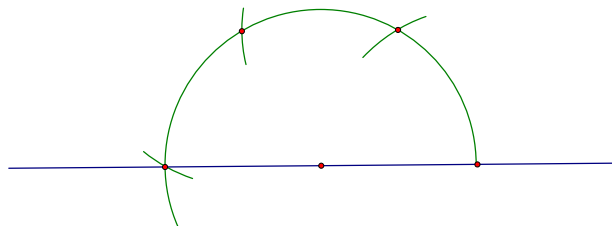


Primjer: Konstruiraj kut od : a) 120° , b) 180° , c) 150° , d) 75° .

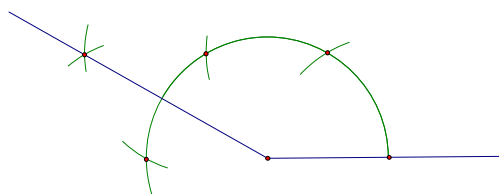
a)



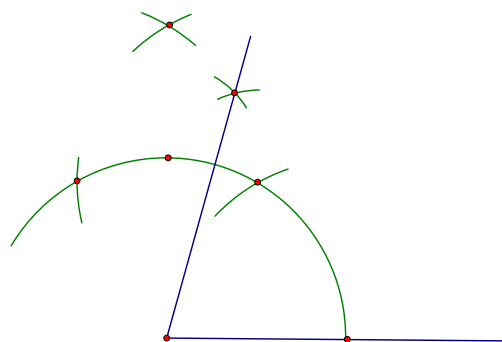
b)



c)

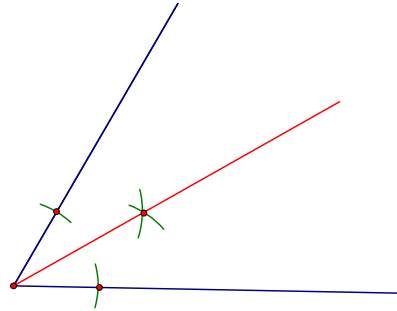


d)

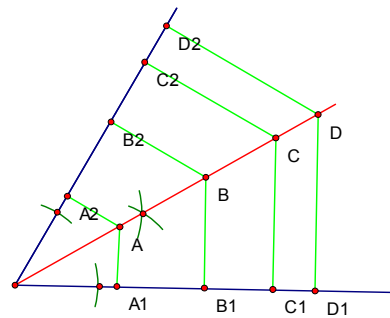


Simetrala kuta

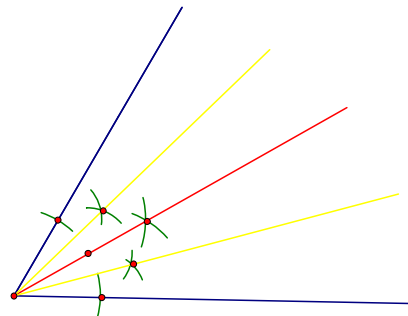
Simetrala kuta je pravac koji dijeli kut na dva jednako velika kuta. Sastoji se od točaka koje su jednako udaljene od obaju krakova kuta.



Svaka točka simetrale kuta jednako je udaljena od oba kraka kuta.



Primjer : Nacrtaј kut i podijeli ga na četiri jednaka dijela.



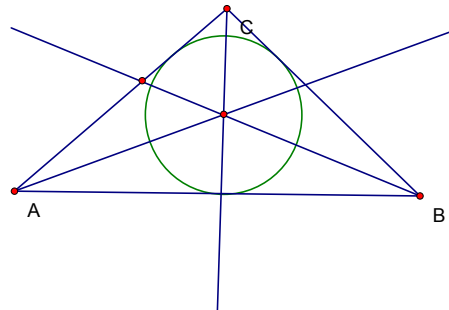
Sve tri simetrale kutova trokuta sijeku se u jednoj točki koja je jednako udaljena od svih njegovih stranica. Tako je točka S središte kružnice koja dodiruje sve njegove stranice i koju zovemo trokutu **upisana kružnica**.

Primjer : Nacrtaj

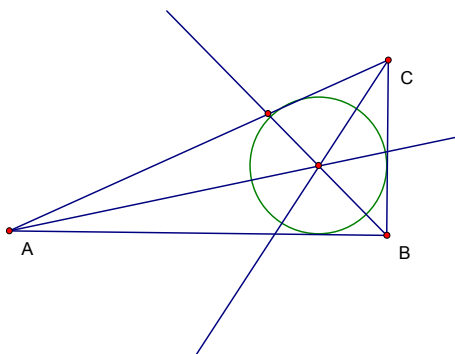
- a) šiljastokutan trokut
- b) pravokutan trokut
- c) tupokutan trokut

i upiši mu kružnicu.

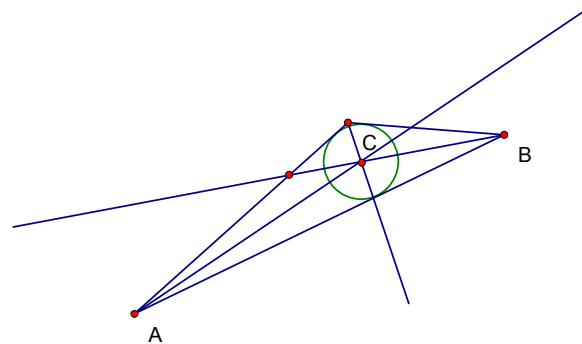
a)



b)



c)



Trokut

Trokut je dio ravnine omeđen trima dužinama od kojih svake dvije imaju zajedničku samo krajnju točku. Te dužine također pripadaju trokutu.

Trokut je jednoznačno određen trima točkama koje ne leže na istom pravcu.

ΔABC - čitaj „trokut ABC“

Vrhovi trokuta : A, B, C

Stranice trokuta : $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$

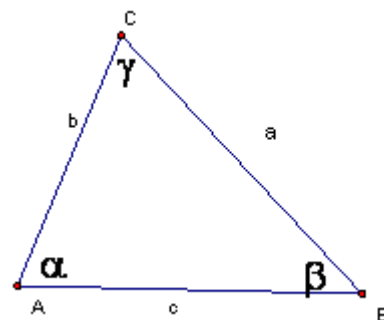
Duljine stranica trokuta :

$a = |BC|, b = |CA|, c = |AB|$

Kutovi trokuta : $\alpha = \angle A = \angle CAB$

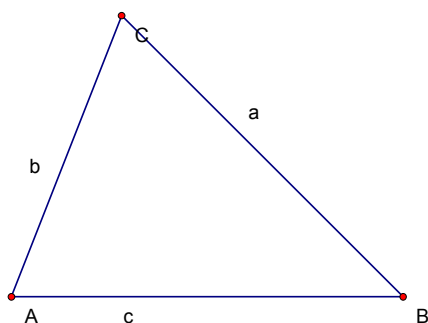
$\beta = \angle B = \angle ABC$

$\gamma = \angle C = \angle BCA$



Opseg trokuta je zbroj duljina njegovih stranica tj. $O = a + b + c$.

Primjer: Nacrtaj trokut, označi ga, a zatim izmjeri duljine njegovih stranica i izračunaj mu opseg.



$$a = 64 \text{ mm}$$

$$b = 49 \text{ mm}$$

$$c = 63 \text{ mm}$$

$$O = ?$$

$$O = a + b + c$$

$$O = (64 + 49 + 63) \text{ mm}$$

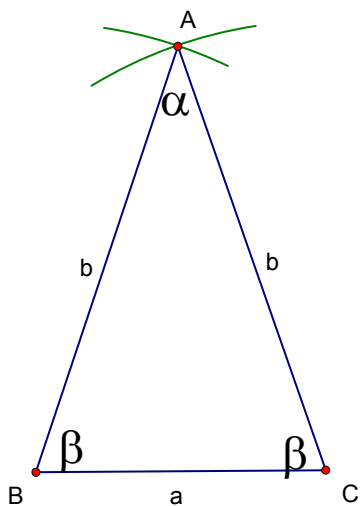
$$O = 176 \text{ mm}$$

S obzirom na duljine stranica, trokute dijelimo na:

1. Raznostranične trokute
2. Jednakokračne trokute
3. Jednakostranične trokute

Raznostraničan trokut je trokut kojemu su sve stranice različitih duljina.

Jednakokračan trokut je trokut koji ima dvije stranice jednake duljine.



a - osnovica

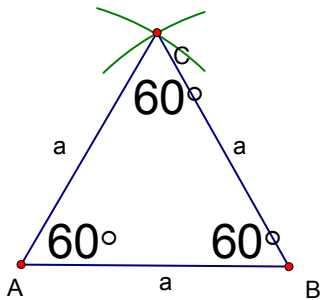
b - krak

α - kut nasuprot osnovici

β - kut uz osnovicu

$$O = a + 2b$$

Jednakostraničan trokut je trokut koji ima sve stranice jednake duljine.

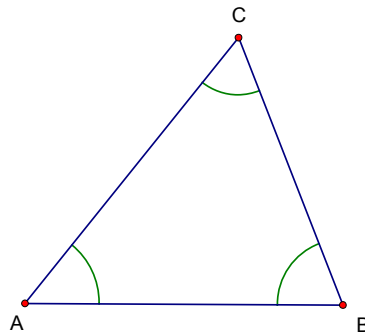


$$O = 3a$$

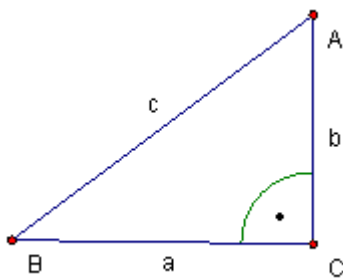
S obzirom na veličine kutova, trokute dijelimo na:

1. Šiljastokutne trokute
2. Pravokutne trokute
3. Tupokutne trokute

Šiljastokutan trokut je trokut kojemu su svi kutovi šiljasti.



Pravokutan trokut je trokut koji ima pravi kut.



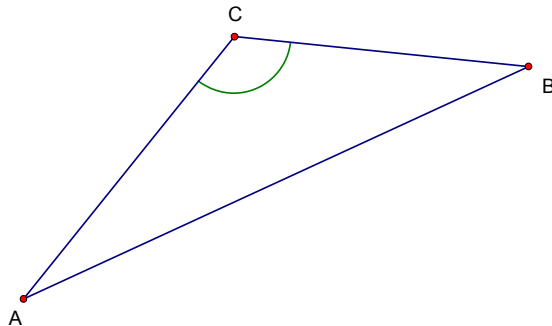
c – hipotenuza

a, b – katete

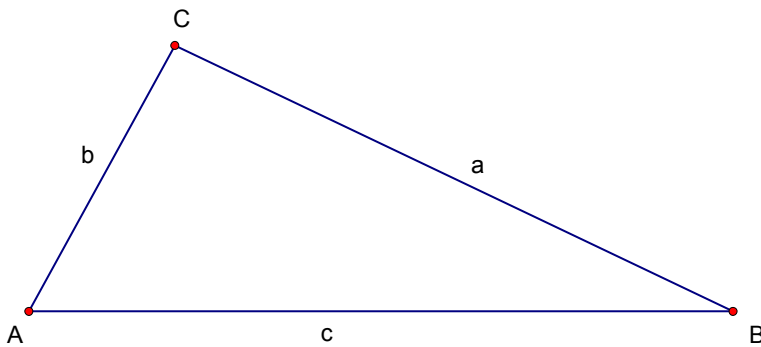
$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{ab}{2} = (ab) : 2$$

Tupokutan trokut je trokut koji ima tupi kut.

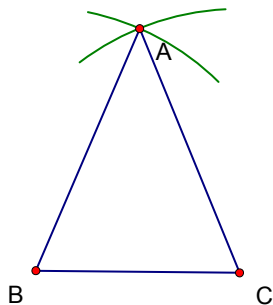


Primjer: Nacrtaj raznostraničan trokut i označi mu vrhove i stranice, te mu izračunaj opseg.



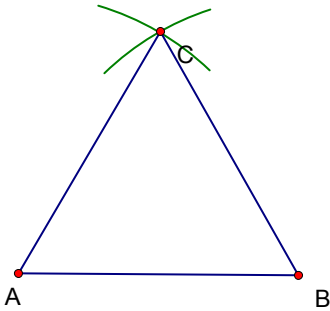
$$\begin{aligned} a &= 82\text{mm} \\ b &= 40\text{mm} \\ \underline{c} &= \underline{93\text{mm}} \\ O &= ? \\ O &= a + b + c \\ O &= 82 + 40 + 93 \\ O &= 215\text{mm} \end{aligned}$$

Primjer: Nacrtaj jednakokrani trokut s osnovicom 27mm i krakom 35mm. Izračunaj opseg tog trokuta.



$$\begin{aligned} a &= 27\text{mm} \\ \underline{b} &= \underline{35\text{mm}} \\ O &= ? \\ O &= a + 2b \\ O &= 27 + 2 \cdot 35 \\ O &= 27 + 70 \\ O &= 97\text{mm} \end{aligned}$$

Primjer: Nactaj jednakostraničan trokut stranice duljine 3.7cm. Izračunaj njegov opseg.



$$a = 3.7\text{cm}$$

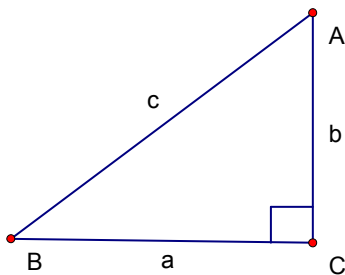
$$O = ?$$

$$O = 3a$$

$$O = 3 \cdot 3.7$$

$$O = 11.1\text{cm}$$

Primjer: Nactaj pravokutni trokut čije katete imaju duljine 3cm i 4cm. Izmjeri duljinu hipotenuze i izračunaj mu opseg i površinu.



$$a = 3\text{cm}$$

$$b = 4\text{cm}$$

$$O, P, c = ?$$

$$c = 5\text{cm}$$

$$O = a + b + c$$

$$O = 3 + 4 + 5$$

$$O = 12\text{cm}$$

$$P = \frac{ab}{2}$$

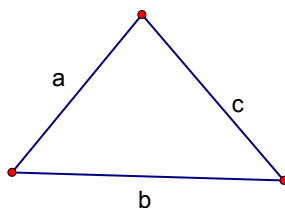
$$P = \frac{3 \cdot 4}{2}$$

$$P = 6\text{cm}^2$$

Nejednakost trokuta

U trokutu je zbroj duljina dviju stranica uvijek veći od duljine treće stranice.

Vrijedi i obrat, ako je zbroj duljina svakih dviju dužina veći od duljine treće dužine, tada od tih dužina možemo načiniti trokut.



$$a + b > c$$

$$a + c > b$$

$$b + c > a$$

Primjer: Može li se nacrtati trokut ako su duljine njegovih stranica:

a)

$$a = 2\text{cm}$$

$$b = 5\text{cm}$$

$$c = 7\text{cm}$$

b)

$$a = 3\text{cm}$$

$$b = 4\text{cm}$$

$$c = 9\text{cm}$$

c)

$$a = 0.7\text{dm}$$

$$b = 6\text{cm}$$

$$c = 40\text{mm}$$

Ne treba provjeravati je li svaka duljina manja od zbroja preostalih dviju. Dovoljno je provjeriti da je najveća duljina manja od zbroja preostalih dviju.

a) $7 = \boxed{c = a+b} = 7$

Ne može se nacrtati trokut jer je $c = a+b$.

b) $9 = \boxed{c > a+b} = 7$

Ne može se nacrtati trokut jer je $c > a+b$.

c) $a = 0.7\text{dm} = 7\text{cm}$

$$b = 6\text{cm}$$

$$c = 40\text{mm} = 4\text{cm}$$

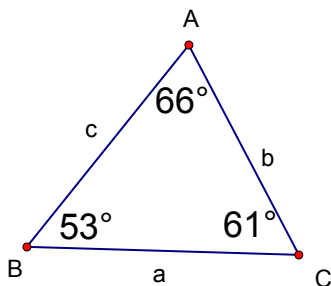
$$7 = \boxed{a < b+c} = 10$$

Može se nacrtati trokut sa zadanim duljinama stranica.

U trokutu je nasuprot većoj stranici veći kut, a nasuprot većem kutu jest veća stranica.
Nasuprot jednakim stranicama leže kutovi jednakih veličina, i obratno.

Primjer: Poredaj po duljini stranice sljedećih trokuta:

a)

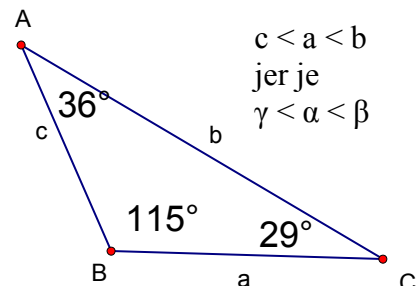


$$b < c < a$$

jer je

$$\beta < \gamma < \alpha$$

b)

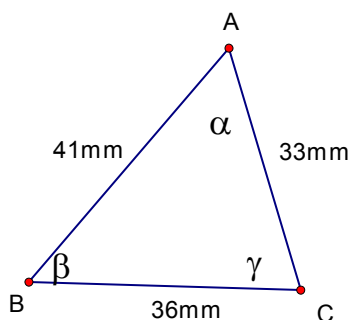


$$c < a < b$$

jer je

$$\gamma < \alpha < \beta$$

Primjer: Poredaj po veličini kutove trokuta:



$$\beta < \alpha < \gamma$$

jer je

$$b < a < c, \text{ odnosno}$$

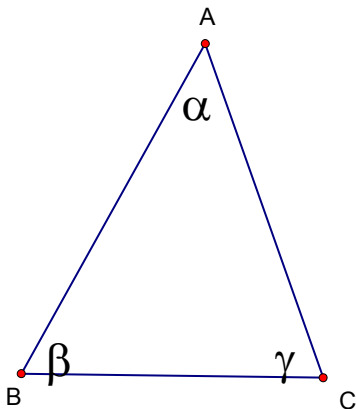
$$33\text{mm} < 36\text{mm} < 41\text{mm}$$

U trokutu nasuprot stranicama jednakih duljina leže kutovi jednakih veličina i obratno.

U jednakokraničnom trokutu sve stranice imaju jednake duljine, pa i kutovi imaju jednake veličine.

U jednakokračnom trokutu krakovi imaju jednake duljine, pa i kutovi nasuprot krakovima imaju jednake veličine.

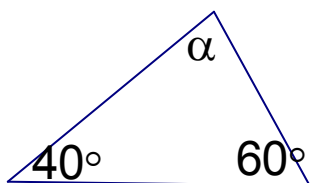
Zbroj kutova u trokutu



Zbroj veličina unutarnjih kutova u trokutu iznosi 180^0

$$\text{tj: } \alpha + \beta + \gamma = 180^0.$$

Primjer: Odredi veličinu nepoznatog kuta sa slike :



$$\begin{aligned} \alpha &= 180^0 - (40^0 + 60^0) \\ \alpha &= 180^0 - 100^0 \\ \alpha &= 80^0 \end{aligned}$$

Primjer: Veličine dvaju kutova u trokutu su $45^{\circ}37'$ i $68^{\circ}56'$. Kolika je veličina trećeg kuta?

$$\alpha = 45^{\circ}37'$$

$$\underline{\beta = 68^{\circ}56'}$$

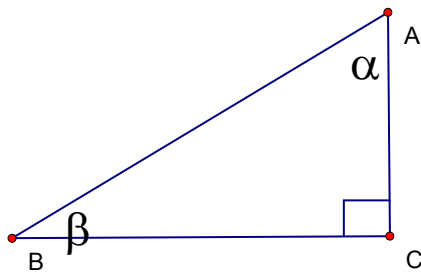
$$\gamma = ?$$

$$\gamma = 180^{\circ} - (45^{\circ}37' + 68^{\circ}56')$$

$$\gamma = 180^{\circ} - 114^{\circ}33'$$

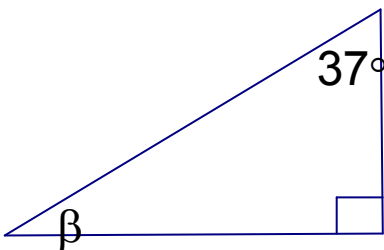
$$\gamma = 65^{\circ}27'$$

Zbroj veličina šiljastih kutova pravokutnog trokuta iznosi 90°



$$\alpha + \beta = 90^{\circ}$$

Primjer: Odredi veličinu nepoznatog kuta sa slike:



$$\alpha = 37^{\circ}$$

$$\underline{\beta = ?}$$

$$\beta = 90^{\circ} - 37^{\circ}$$

$$\beta = 53^{\circ}$$

α' β' γ' -vanjski kutovi u trokutu
Unutarnji i pripadajući vanjski kut
zajedno daju 180° .

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

$$\beta + \beta' = 180^\circ$$

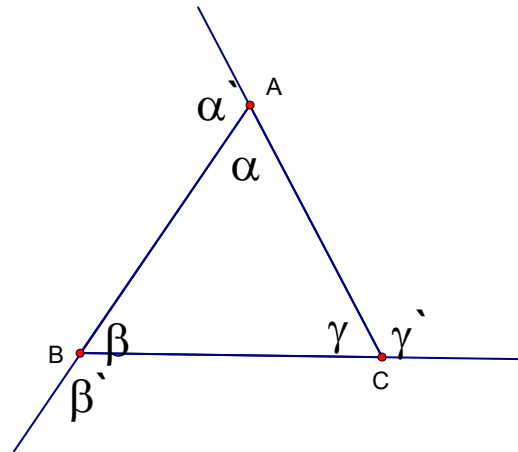
$$\gamma + \gamma' = 180^\circ$$

Veličina vanjskog kuta trokuta
jednaka je zbroju veličina nesusjednih
unutarnjih kutova.

$$\alpha' = \beta + \gamma$$

$$\beta' = \alpha + \gamma$$

$$\gamma' = \alpha + \beta$$

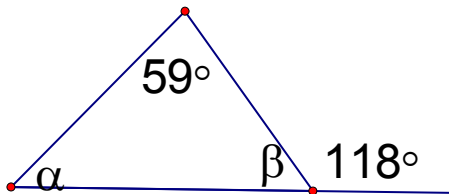


Zbroj veličina vanjskih kutova u trokutu iznosi 360° .

$$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^\circ$$

Primjer: Odredi veličine nepoznatih kutova sa slike:

a)



$$\beta = 180^\circ - 118^\circ$$

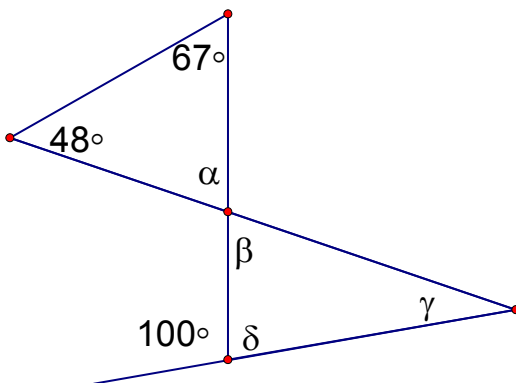
$$\beta = 62^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - 121^\circ$$

$$\alpha = 59^\circ$$

$$\alpha = 180^\circ - (59^\circ + 62^\circ)$$

b)



$$\alpha = 180^\circ - (48^\circ + 67^\circ)$$

$$\alpha = 180^\circ - 115^\circ$$

$$\alpha = 65^\circ$$

$$\beta = 65^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 100^\circ$$

$$\delta = 80^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - (65^\circ + 80^\circ)$$

$$\gamma = 180^\circ - 145^\circ$$

$$\gamma = 35^\circ$$

Sukladnost trokuta

Dva trokuta koja se mogu položiti jedan na drugoga tako da se poklapaju, nazivaju se SUKLADNI TROKUTI.

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (čitamo: trokut ABC sukladan je trokutu DEF).

Za sukladne trokute ($\triangle ABC \cong \triangle DEF$) vrijede sljedeće jednakosti:

$$|AB| = |DE| \qquad | \angle A | = | \angle D |$$

$$|BC| = |EF| \qquad | \angle B | = | \angle E |$$

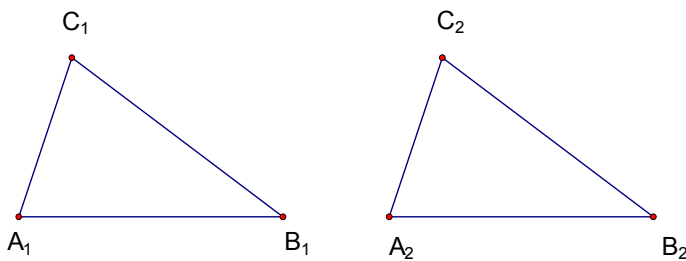
$$|CA| = |FD| \qquad | \angle C | = | \angle F |$$

Sukladni trokuti imaju odgovarajuće stranice jednakih duljina i odgovarajuće kutove jednakih veličina.

Poučci o sukladnosti trokuta

1. Poučak: SSS(stranica-stranica-stranica)

Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u sve tri stranice.



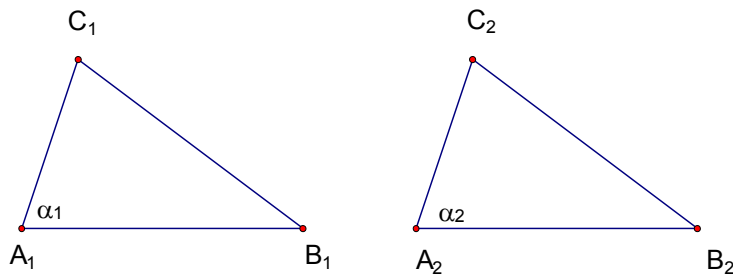
$$|A_1B_1| = |A_2B_2|$$

$$|B_1C_1| = |B_2C_2|$$

$$|C_1A_1| = |C_2A_2|$$

2. Poučak: SKS(stranica-kut-stranica)

Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u dvije stranice i kutu među njima.



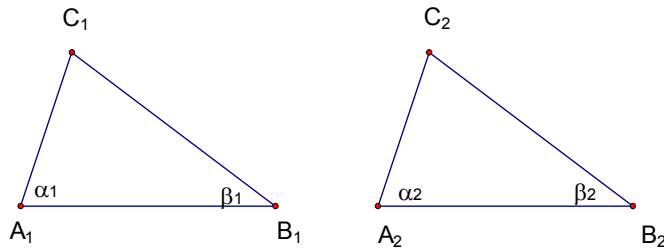
$$|A_1B_1| = |A_2B_2|$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$|C_1A_1| = |C_2A_2|$$

3. Poučak: KSK (kut-stranica-kut)

Dva su trokuta sukladna ako se poklapaju u jednoj stranici i kutovima uz tu stranicu.

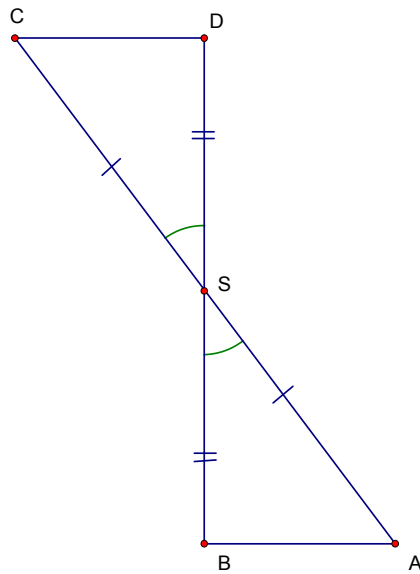


$$|A_1B_1| = |A_2B_2|$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\beta_1 = \beta_2$$

Primjer: Dužine \overline{AC} i \overline{BD} se raspolavljaju. Ako je \overline{AB} duga 3cm, kolika je duljina dužine \overline{CD} ?



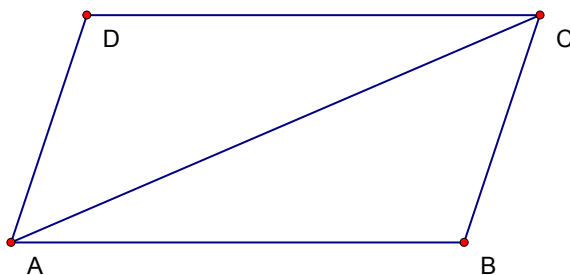
$$\angle CSD = \angle BSA$$

$$|CS| = |SA|$$

$$|BS| = |SD|$$

$$\xrightarrow{S-K-S} \Delta BSA \cong \Delta CSD \longrightarrow |AB| = |CD| \longrightarrow |CD| = 3cm$$

Primjer: Dijagonala paralelograma dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta. Dokaži!



$$\left. \begin{array}{l} |AD| = |BC| \\ |AB| = |CD| \\ |AC| \end{array} \right\} \xrightarrow{S-S-S} \Delta ABC \cong \Delta ACD$$

TRIOSNOVNE KONSTRUKCIJE TROKUTA

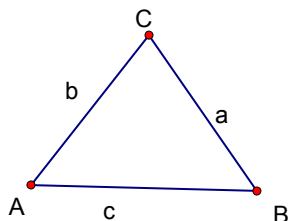
Postoje tri osnovne konstrukcije trokuta. To su :

1. Konstrukcija S-S-S: konstrukcija trokuta ako su zadane duljine svih triju stranica.
2. Konstrukcija S-K-S: konstrukcija trokuta ako su zadane duljine dviju stranica i veličina kuta između njih.
3. Konstrukcija K-S-K: konstrukcija trokuta ako je zadana duljina jedne stranice i veličine dvaju kutova uz tu stranicu.

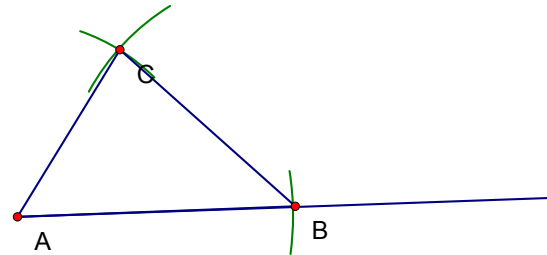
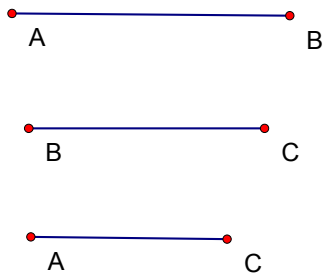
Primjer: Konstruiraj trokut ABC kojemu su zadane ove duljine stranica :

$$c = |AB| = 3.5 \text{ cm} ; a = |BC| = 3 \text{ cm} \text{ i } b = |AC| = 2.5 \text{ cm}$$

Skica:

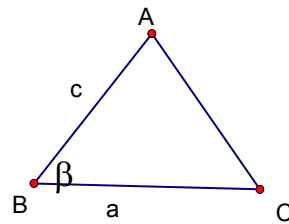


Konstrukcija:

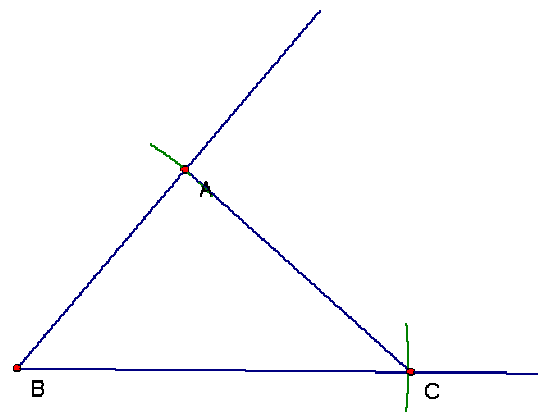
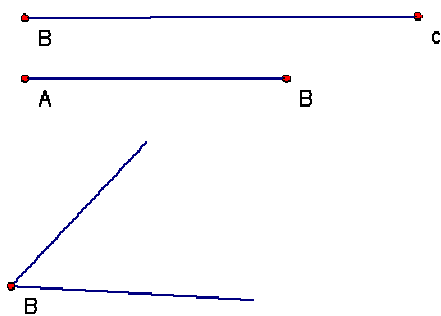


Primjer: Konstruiraj trokut ABC kojemu su zadane duljine stranica $a=6$ cm, $c=4$ cm i veličina kuta $\beta=50^\circ$.

Skica:

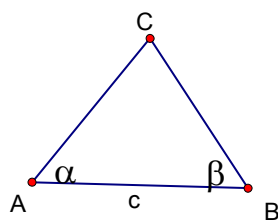


Konstrukcija:

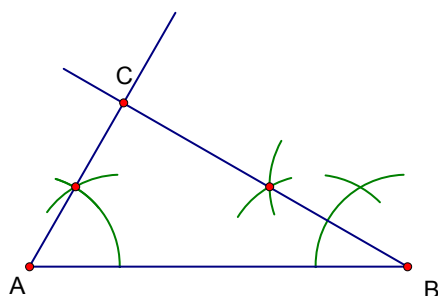


Primjer: Konstruiraj trokut ABC kojemu su zadane veličine kutova $\alpha=30^\circ$ i $\beta=60^\circ$ te stranica duljine $c=5\text{cm}$.

Skica:

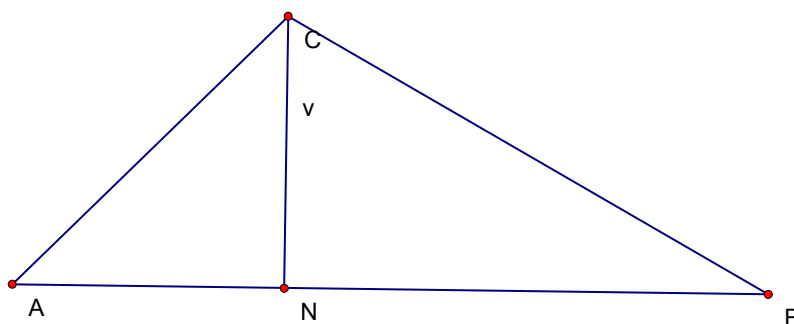


Konstrukcija:

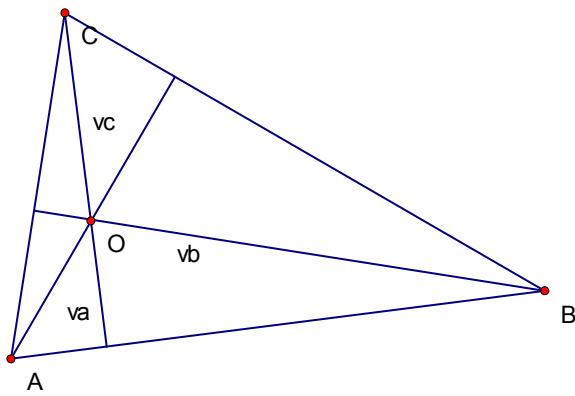


Površina trokuta

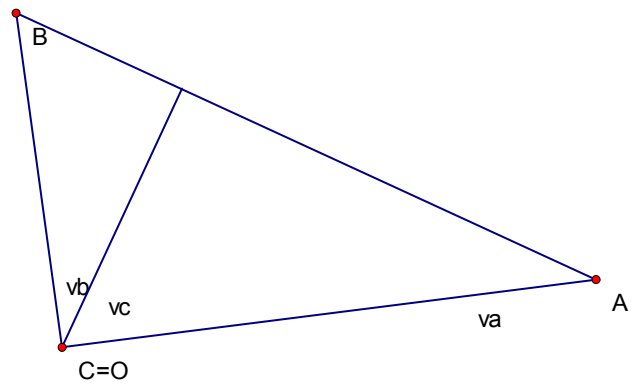
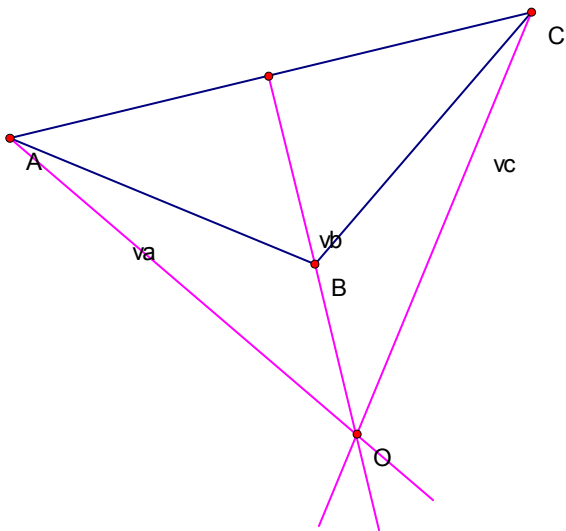
v- visina trkuta
Trokut ima tri visine.



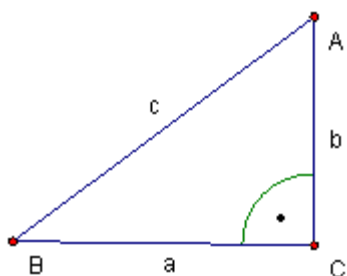
Sjecište okomice i pravca na kojem leži nasuprotna stranica zovemo nožište visine.



O-ortocentar
 Ortocentar je točka u kojoj se sijeku visine trokuta.

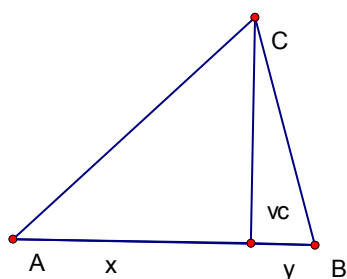


Površina pravokutnog trokuta.



$$P = \frac{1}{2} a \cdot b$$

Površina trokuta



$$P = P_1 + P_2$$

$$P = \frac{xv_c}{2} + \frac{yv_c}{2}$$

$$P = \frac{v_c}{2}(x + y)$$

$$P = \frac{cv_c}{2}$$

Analogno, možemo dobiti i da je $P = \frac{av_a}{2}$ i $P = \frac{bv_b}{2}$.

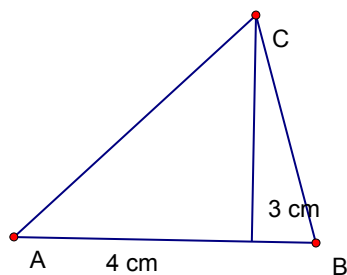
Površina trokuta jest polovina umnoška duljine jedne stranice i duljine visine na nju

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$P = \frac{b \cdot v_b}{2} \text{ i } P = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

Iz ovih formula slijedi
 $a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$

Primjer: Izračunaj površinu trokuta sa slike



$$c = 4\text{cm}$$

$$v_c = 3\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot 3$$

$$P = 6\text{cm}^2$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$

Primjer:

$$P = 5\text{cm}^2$$

$$a = 2,5\text{cm}$$

$$v_a = ?$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$5 = \frac{2,5 \cdot v_a}{2}$$

$$\frac{2,5 \cdot v_a}{2} = 5 / \cdot 2$$

$$2,5 \cdot v_a = 10$$

$$v_a = 10 : 2,5$$

$$v_a = 4\text{cm}$$

Primjer:

$$c = 12\text{cm}$$

$$v_c = 7\text{cm}$$

$$P = ?$$

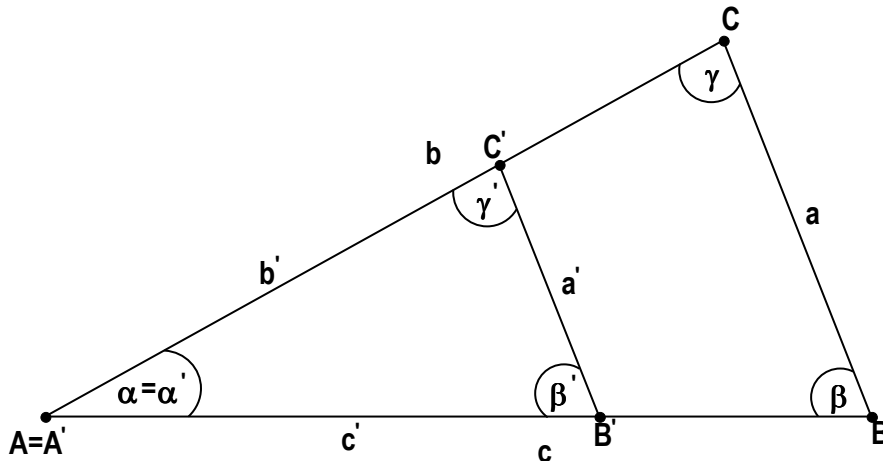
$$P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot 12^6 \cdot 7$$

$$P = 42\text{cm}^2$$

SLIČNOST

Slični likovi imaju isti oblik ali ne i veličinu. Ako su oblik i veličina jednake onda su likovi sukladni. Znak za sličnost je \sim , a za sukladnost \cong . Kod sličnih likova duljine odgovarajućih stranica su proporcionalne, a odgovarajući kutovi jednake veličine.



Ako je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$ onda je $\frac{|B'C'|}{|BC|} = \frac{|A'C'|}{|AC|} = \frac{|A'B'|}{|AB|} = k$ ili $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ i

$$\alpha' = \alpha, \beta' = \beta, \gamma' = \gamma$$

k je koeficijent sličnosti

Primjer:

Trokut ΔMNL ima duljine stranica : $m = 16\text{cm}$, $n = 20\text{cm}$ i $l = 24\text{cm}$, a trokut ΔPRS ima duljine stranica : $p = 8\text{cm}$, $r = 10\text{cm}$, $s = 12\text{cm}$.

Jesu li trokuti slični i koliki je koeficijent sličnosti?

ΔMNL : $m = 16\text{cm}$, $n = 20\text{cm}$, $l = 24\text{cm}$ Stranice su poredane
 ΔPRS : $p = 8\text{cm}$, $r = 10\text{cm}$, $s = 12\text{cm}$ po veličini .

$$\frac{m}{p} = \frac{n}{r} = \frac{l}{s} = k$$

$$\frac{16}{8} = \frac{20}{10} = \frac{24}{12} = k$$

$$k = 2$$

$$\Delta MNL \stackrel{k=2}{\sim} \Delta PRS$$

Trokut ΔMNL dva puta je veći od ΔPRS .

Primjer :

Trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ su slični. Izračunaj duljine nepoznatih stranica ako je:

$$\begin{aligned} a &= 15\text{cm} \\ a' &= ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 18\text{cm} \\ b' &= 6\text{cm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &= ? \\ c' &= 9\text{cm} \end{aligned}$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{a'}{a}$$

$$\frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

$$\frac{b'}{b} = k$$

$$\frac{6}{18} = \frac{a'}{15}$$

$$\frac{6}{18} = \frac{9}{c}$$

$$\frac{6}{18} = k$$

$$\frac{1}{3} = \frac{a'}{15}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{9}{c}$$

$$k = \frac{1}{3}$$

$$c = 27\text{cm}$$

$$3a' = 15$$

$$a' = 5\text{cm}$$

$$\triangle ABC \stackrel{k=3}{\sim} \triangle A'B'C'$$

Trokut $\triangle ABC$ tri puta je veći od trokuta $\triangle A'B'C'$.

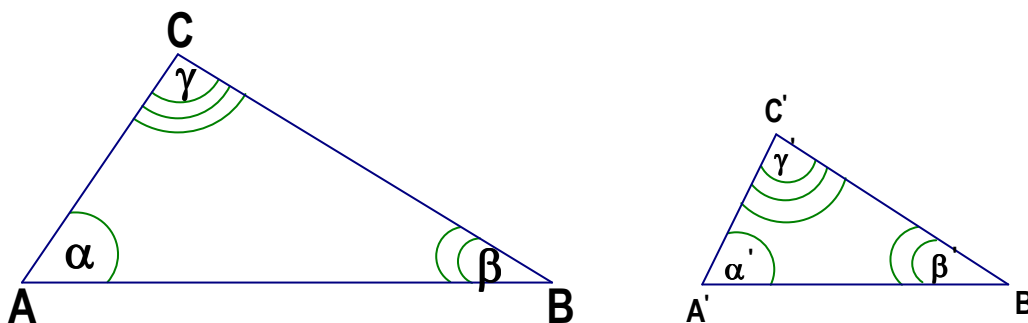
$$\text{Ili } \triangle A'B'C' \stackrel{k=\frac{1}{3}}{\sim} \triangle ABC$$

Trokut $\triangle A'B'C'$ je tri puta manji od $\triangle ABC$.

POUČCI O SLIČNOSTI TROKUTA

K-K poučak o sličnosti trokuta

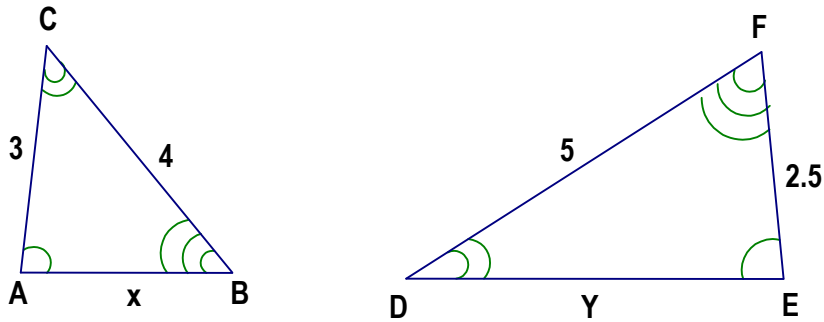
Ako dva trokuta imaju odgovarajuće kutove jednakih veličina, onda su slični. Jednakost je dovoljno ustanoviti za dva kuta jer će onda sigurno vrijediti i za treći kut.



Ako je $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ ($\gamma = \gamma'$), onda je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Primjer:

-Ako je $|\angle A| = |\angle E|$ i $|\angle B| = |\angle F|$, jesu li zadani trokuti slični? Kolike su duljine stranica x i y ?



Kutove jednake veličine u ΔABC i ΔDEF označili smo jednakim brojem lukova. Po K-K poučku $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Vrijedi:

$$\frac{x}{2.5} = \frac{4}{5}$$

$$x \cdot 5 = 2.5 \cdot 4$$

$$x = \frac{2.5 \cdot 4}{5}$$

$$x = 2$$

$$\frac{y}{3} = \frac{5}{4}$$

$$4 \cdot y = 3 \cdot 5$$

$$y = \frac{3 \cdot 5}{4}$$

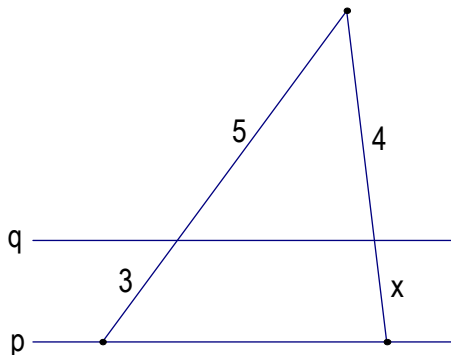
$$y = 3.75$$

VAŽNO!

Odgovarajuće su stranice proporcionalne, nalaze se nasuprot kutovima jednake veličine.

Primjer:

Ako je $p \parallel q$, izračunaj x .



$$5:8 = 4:(4+x)$$

$$5(4+x) = 8 \cdot 4$$

$$20 + 5x = 32$$

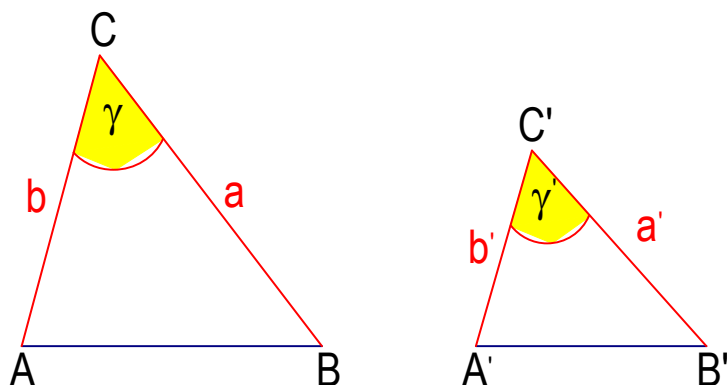
$$5x = 12$$

$$x = \frac{12}{5}$$

$$x = 2.4$$

S-K-S poučak o sličnosti trokuta

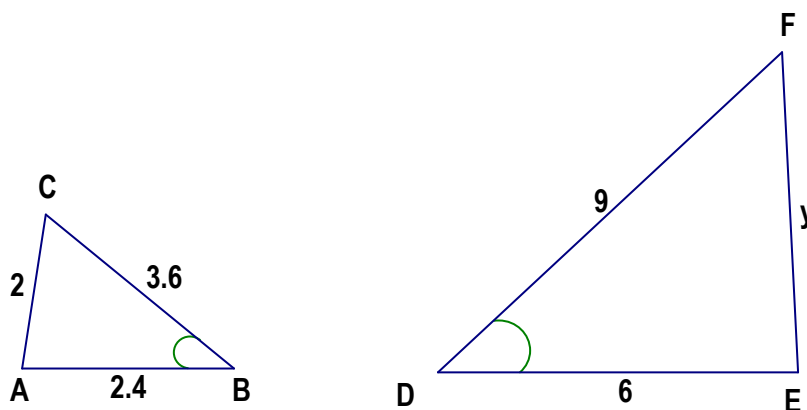
Ako dva trokuta imaju dva para odgovarajućih stranica proporcionalna i kutove između njih jednake veličine, onda su ti trokuti slični.



Ako je $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = k$ i $\gamma' = \gamma$,
onda je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$.

Primjer:

1. Jesu li trokuti slični? Izračunaj y .



Trokuti imaju jednake veličine kutova u vrhu B i D. Stoga je dovoljno provjeriti jesu li duljine odgovarajućih stranica koje zatvaraju te kutove proporcionalne.

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{2.4}{6} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5} \qquad \frac{|BC|}{|DF|} = \frac{3.6}{9} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|DF|} = \frac{2}{5} = k$$

Omjeri su jednaki, što znači da su odgovarajuće stranice proporcionalne.

Po S-K-S poučku $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Iz sličnosti vrijedi:

$$\frac{|AC|}{|EF|} = \frac{|AB|}{|DE|}$$

$$\frac{2}{y} = \frac{2.4}{6}$$

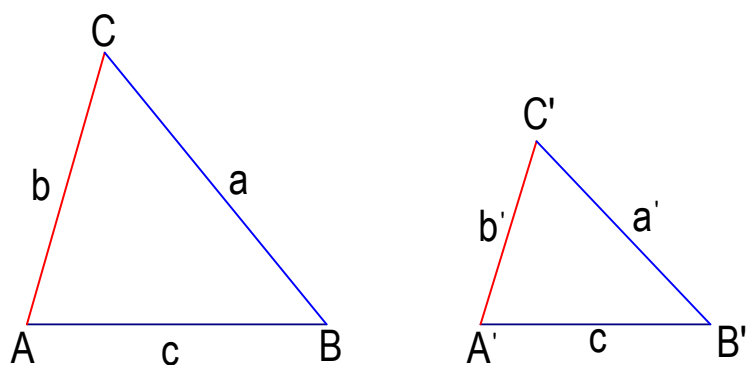
$$2.4 \cdot y = 2 \cdot 6$$

$$y = \frac{12}{2.4}$$

$$y = 5$$

S-S-S POUČAK O SLIČNOSTI TROKUTA

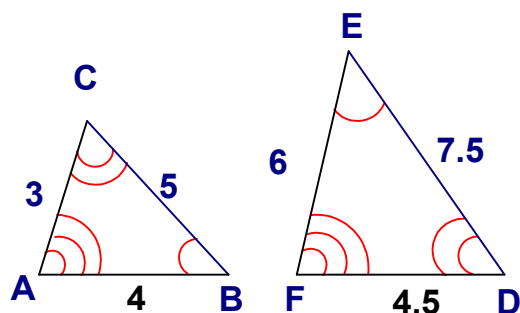
- Ako dva trokuta imaju odgovarajuće stranice proporcionalne, onda su slični :



Ako je $\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$ onda je $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Primjer:

-Jesu li trokuti slični ? Ako jesu, koji su im odgovarajući kutovi jednakih veličina ?



- Poredajmo po veličini stranice oba trokuta :

$$\begin{array}{l} \Delta ABC : 3 \quad 4 \quad 5 \\ \Delta FDE : 4.5 \quad 6 \quad 7.5 \end{array} \quad \begin{array}{l} \angle E \cong \angle B \\ \angle D \cong \angle C \\ \angle F \cong \angle A \end{array}$$

Budući da je

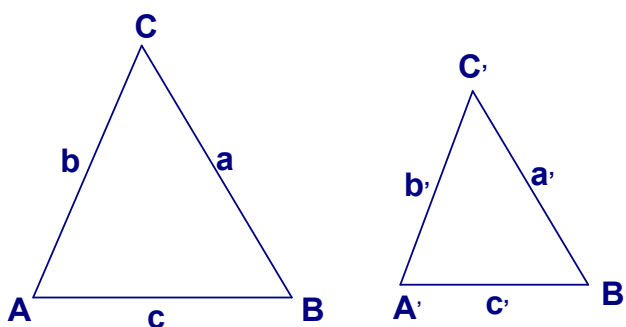
$$\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|AB|}{|EF|} = \frac{|BC|}{|DE|}$$

$$\frac{\cancel{3}^2}{\cancel{4.5}_3} = \frac{\cancel{4}^2}{\cancel{6}_3} = \frac{\cancel{5}^2}{\cancel{7.5}_3} = k \quad k = \frac{2}{3}$$

Duljine stranica su proporcionalne pa je $\Delta ABC \sim \Delta FDE$ po S-S-S poučku .

OPSEZI I POVRŠINE SLIČNIH TROKUTA

-Omjer opsega sličnih trokuta



Trokuti ΔABC i $\Delta A'B'C'$ su slični . Duljine njihovih stranica su a, b, c i a', b', c' .

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c} = k$$

$$a' = k \cdot a, b' = k \cdot b, c' = k \cdot c$$

$$O' = a' + b' + c'$$

$$O' = k \cdot a + k \cdot b + k \cdot c$$

$$O' = k \cdot (a + b + c) \quad a + b + c = O$$

$$O' = k \cdot O$$

$$\frac{O'}{O} = k$$

$$o' = k \cdot o$$

Primjer:

Duljine odgovarajućih stranica sličnih trokuta su 10cm i 14cm. Koliki je opseg manjeg trokuta ako je opseg većeg 63 cm ?

$$a=10\text{cm}$$

$$a'=14\text{cm}$$

$$O'=63\text{cm}$$

$$O=?$$

$$\frac{a'}{a} = \frac{7}{5} = k$$

$$\frac{O'}{O} = k$$

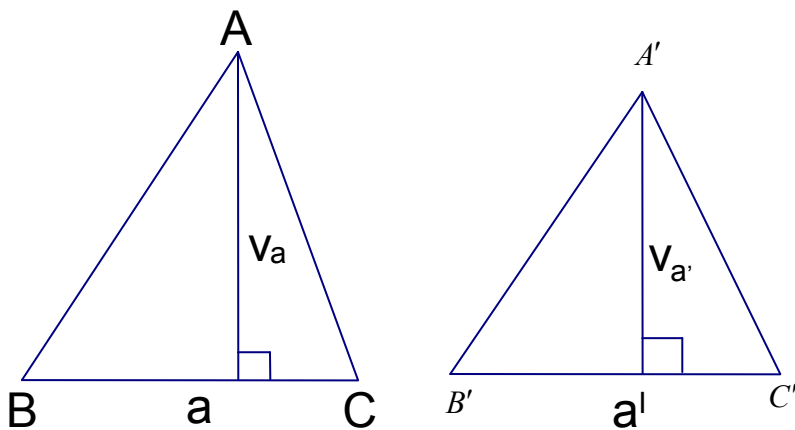
$$\frac{63}{O} = \frac{7}{5}$$

$$7 \cdot O = 63 \cdot 5$$

$$O = \frac{\cancel{63}^9 \cdot 5}{\cancel{7}_1} \text{cm}$$

$$O = 45\text{cm}$$

Omjer površina sličnih trokuta



$$V_a = V \quad V_{a'} = V'$$

$$P = \frac{a \cdot v}{2} \quad P' = \frac{a' \cdot v'}{2}$$

Omjer površina je :

$$\frac{P'}{P} = \frac{\frac{a' \cdot v'}{2}}{\frac{a \cdot v}{2}} = \frac{a' \cdot v'}{a \cdot v} = \frac{a'}{a} \cdot \frac{v'}{v} = k \cdot k = k^2$$

$$\frac{P'}{P} = k^2 \quad P' = k^2 \cdot P$$

Primjer:

Opsezi dvaju sličnih trokuta odnose se kao 6:5 .Ako je površina manjeg trokuta 75 cm^2 , izračunaj površinu većeg trokuta .

$$O':O = 6:5$$

$$\frac{P}{P'} = \frac{75 \text{ cm}^2}{?}$$

$$P' = k^2 \cdot P \quad k = \frac{6}{5}$$

$$P' = \left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot 75 \text{ cm}^2$$

$$P' = \frac{36}{25} \cdot 75 \text{ cm}^2$$

$$P' = 108 \text{ cm}^2$$

ili

$$\frac{P'}{P} = \left(\frac{O'}{O}\right)^2$$

$$\frac{P'}{75} = \left(\frac{6}{5}\right)^2$$

$$\frac{P'}{75} = \frac{36}{25}$$

$$P' \cdot 25 = 75 \cdot 36$$

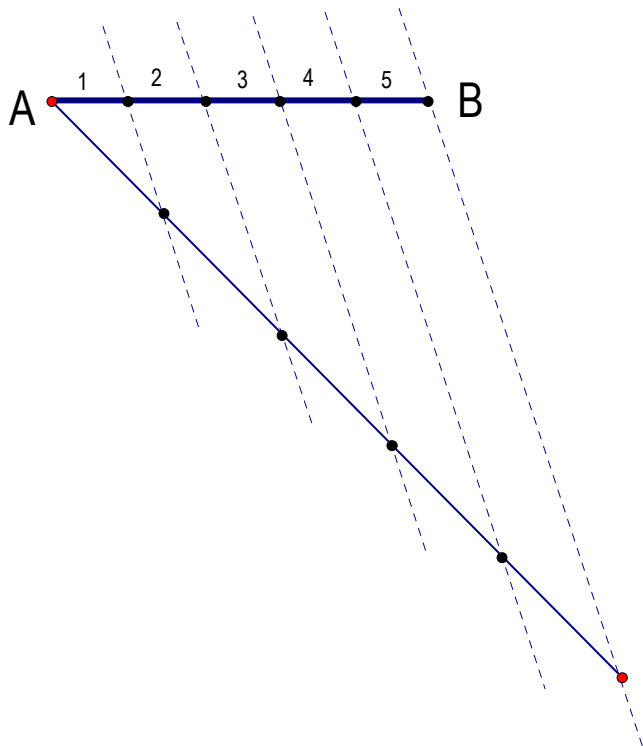
$$P' = \frac{75 \cdot 36}{25} \text{ cm}^2$$

$$P' = 108 \text{ cm}^2$$

DIJELJENJE DUŽINE NA JEDNAKE DIJELOVE

Primjer :

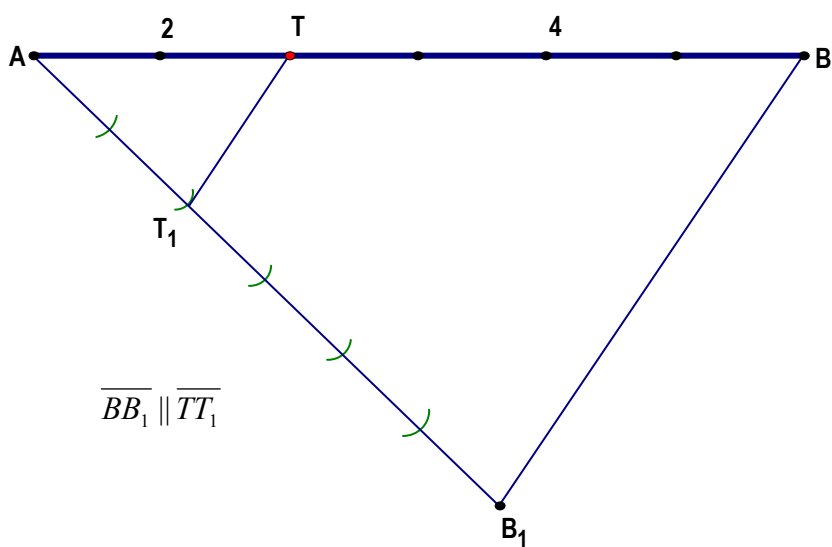
Podijelimo dužinu \overline{AB} na 5 jednakih dijelova .



DIJELJENJE DUŽINE U ZADANOM OMJERU

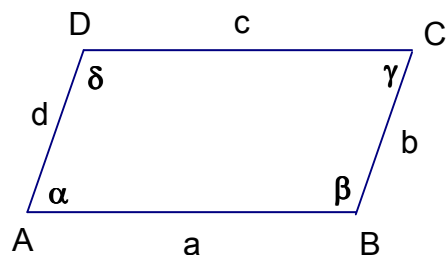
Primjer:

Nacrtaj dužinu duljine 10 cm i točkom T je podijeli u omjeru 2:4 .



ČETVEROKUTI

- Dio ravnine omeđen četirima dužinama, uključujući i točke tih dužina naziva se **ČETVEROKUT**.



Vrhovi četverokuta: A, B, C, D

Stranice četverokuta: \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA}

Duljine stranica: $a = |\overline{AB}|$

$b = |\overline{BC}|$

$c = |\overline{CD}|$

$d = |\overline{DA}|$

Kutovi četverokuta: $\alpha = \angle A = \angle DAB = \angle dAa$

$\beta = \angle B = \angle ABC = \angle aBb$

$\chi = \angle C = \angle BCD = \angle bCc$

$\delta = \angle D = \angle CDA = \angle cDd$

- Stranice četverokuta sa zajedničkim vrhom nazivaju se **SUSJEDNE STRANICE**, a one koje nemaju zajednički vrh nazivaju se **NASUPROTNE (NESUSJEDNE) STRANICE**.

- Vrhovi četverokuta koji leže na istoj stranici nazivaju se **SUSJEDNI VRHOVI ČETVEROKUTA**.

Vrhovi koji ne leže na istoj stranici nazivaju se **NASUPROTNI VRHOVI ČETVEROKUTA**.

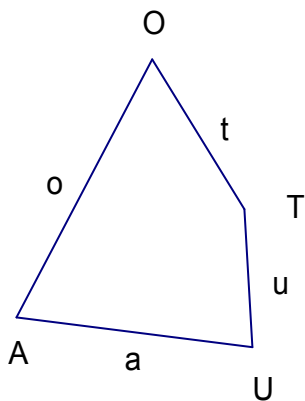
- Dužina koja spaja nasuprotne vrhove četverokuta naziva se **DIJAGONALA ČETVEROKUTA**.

Četverokut ima dvije dijagonale. To su \overline{AC} i \overline{BD} .

- Opseg četverokuta je zbroj duljina njegovih stranica:

$$O = a + b + c + d$$

Primjer 1. Nacrtaj četverokut AUTO, označi mu vrhove, stranice, a zatim mu izračunaj opseg.



$$a = |\overline{AU}| = 36 \text{ mm}$$

$$u = |\overline{UT}| = 13 \text{ mm}$$

$$t = |\overline{TO}| = 25 \text{ mm}$$

$$\underline{o = |\overline{OA}| = 40 \text{ mm}}$$

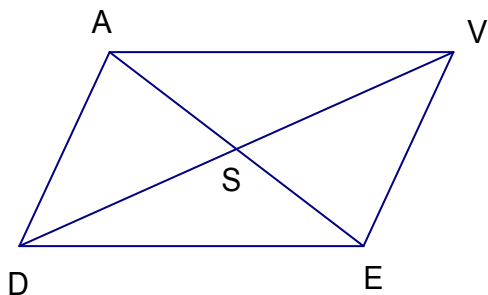
$$O = ?$$

$$O = a + u + t + o$$

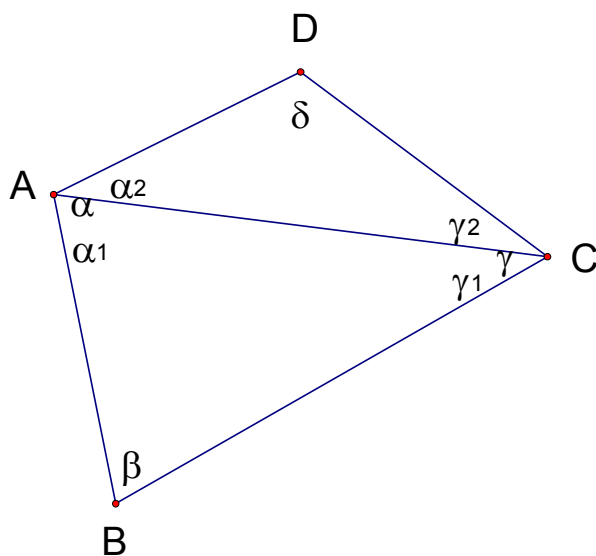
$$O = 36 + 13 + 25 + 40$$

$$O = 114 \text{ mm}$$

Primjer 2. Nacrtaj četverokut DEVA i nacrtaj njegove dijagonale.



Kutovi četverokuta



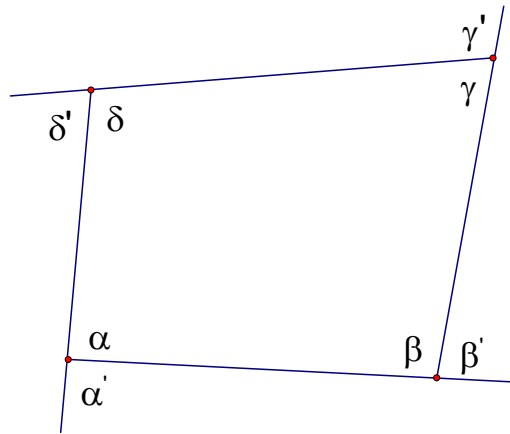
$$\triangle ABC : \alpha_1 + \beta + \gamma_1 = 180^\circ$$

$$\triangle ADC : \alpha_2 + \gamma_2 + \delta = 180^\circ$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta + \gamma_1 + \gamma_2 + \delta = 360^\circ$$

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ$$

Zbroj veličina unutrašnjih kutova u četverokutu jest 360° .



Sukut unutrašnjeg kuta četverokuta zove se vanjski kut.

$$\alpha + \alpha' = 180^\circ$$

$$\beta + \beta' = 180^\circ$$

$$\gamma + \gamma' = 180^\circ$$

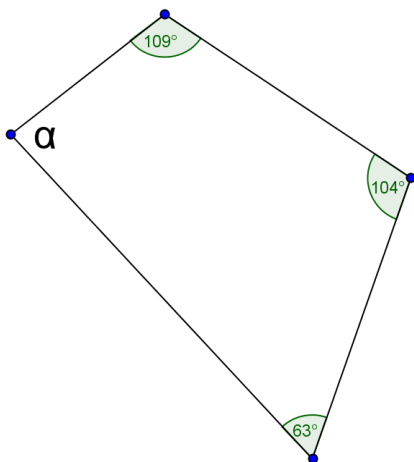
$$\delta + \delta' = 180^\circ$$

$$\underbrace{\alpha + \beta + \gamma + \delta + \alpha' + \beta' + \gamma' + \delta'}_{360^\circ} = 720^\circ$$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \delta' = 360^\circ$$

Zbroj veličina vanjskih kutova u četverokutu iznosi 360° .

Primjer:



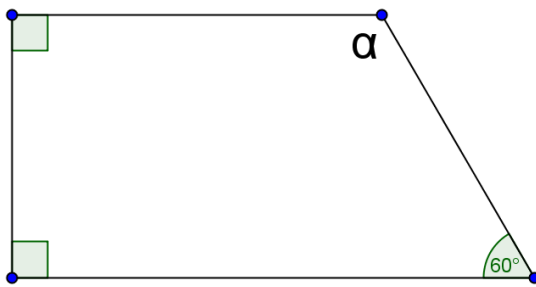
$$\alpha + 63^\circ + 104^\circ + 109^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha + 276^\circ = 360^\circ$$

$$\alpha = 360^\circ - 276^\circ$$

$$\alpha = 84^\circ$$

Primjer:



$$\alpha = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 60^\circ)$$

$$\alpha = 360^\circ - 240^\circ$$

$$\alpha = 120^\circ$$

Primjer:

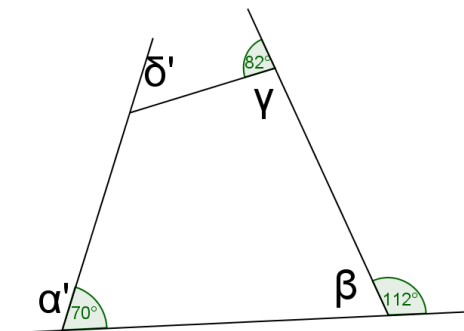
$$\alpha = 121^\circ \quad \gamma = 360^\circ - (121^\circ + 32^\circ + 105^\circ)$$

$$\beta = 32^\circ \quad \gamma = 360^\circ - 258^\circ$$

$$\delta = 105^\circ \quad \gamma = 102^\circ$$

$$\gamma = ?$$

Primjer:



$$\alpha' = 180^\circ - 70^\circ$$

$$\alpha' = 110^\circ$$

$$\beta = 68^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - 82^\circ$$

$$\gamma = 98^\circ$$

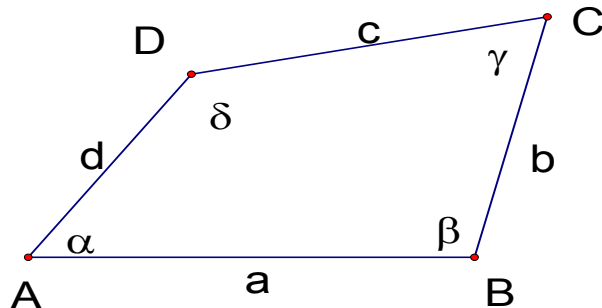
$$\delta' = 360^\circ - (110^\circ + 112^\circ + 82^\circ)$$

$$\delta' = 56^\circ$$

VRSTE ČETVEROKUTA

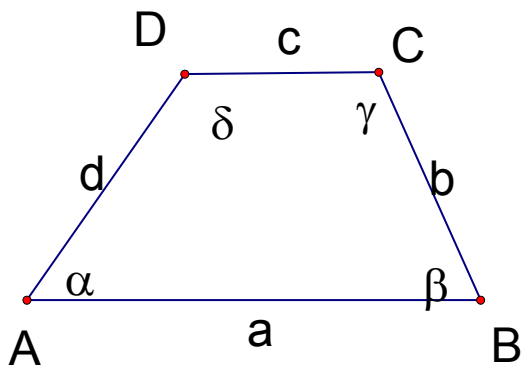
Vrste četverokuta su: trapezoidi, trapezi i paralelogrami.

TRAPEZOID je četverokut koji nema paralelnih stranica.



$$O = a + b + c + d$$

TRAPEZ je četverokut koji ima jedan par paralelnih stranica.



$$O = a + b + c + d$$

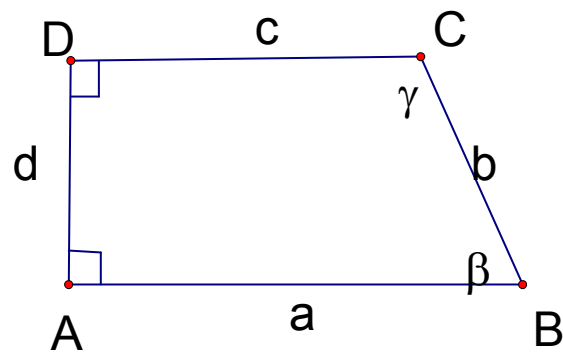
a, c = osnovice

b, d = krakovi

Kutovi koji leže na istom kraku trapeza zajedno čine ispruženi kut.

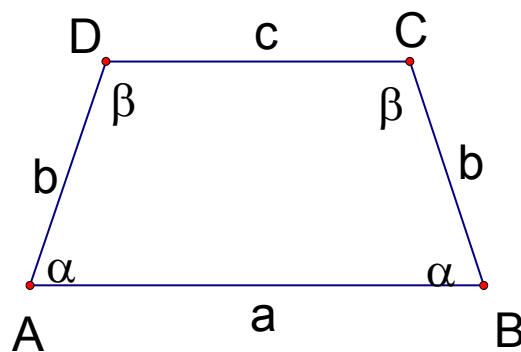
$$\alpha + \delta = 180^\circ \quad \text{i} \quad \beta + \gamma = 180^\circ$$

PRAVOKUTNI TRAPEZ je trapez koji ima pravi kut.



$$O = a + b + c + d$$

JEDNAKOKRAČAN TRAPEZ je trapez koji ima krakove jednake duljine.



$$O = a + 2b + c$$

Kutovi koji leže na istoj osnovici međusobno su jednaki.

Primjer: Šiljasti kut trapeza ima veličinu 82° , a tupi kut 115° . Odredi veličine preostalih kutova trapeza.

$$\alpha = 82^\circ$$

$$\beta + 115^\circ = 180^\circ$$

$$\delta + 82^\circ = 180^\circ$$

$$\underline{\gamma = 115^\circ}$$

$$\beta = 180^\circ - 115^\circ$$

$$\delta = 180^\circ - 82^\circ$$

$$\beta, \delta = ?$$

$$\beta = 65^\circ$$

$$\delta = 98^\circ$$

Primjer:

Šiljasti kut jednakokračnog trapeza ima veličinu 72° . Odredi veličine preostalih kutova tog trapeza.

$$\alpha = 72^\circ$$

$$\delta + 72^\circ = 180^\circ$$

$$\gamma = \delta$$

$$\beta, \gamma, \delta = ?$$

$$\delta = 180^\circ - 72^\circ$$

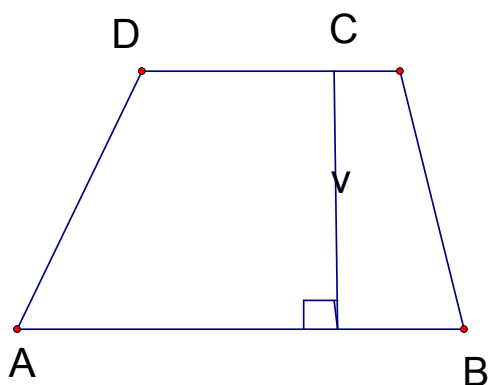
$$\gamma = 108^\circ$$

$$\beta = 72^\circ$$

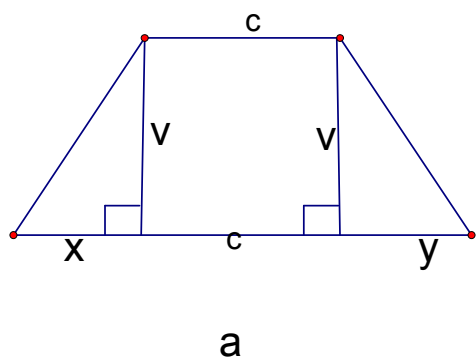
$$\delta = 108^\circ$$

POVRŠINA TRAPEZA

v-visina trapeza



POVRŠINA TRAPEZA



$$P = P_1 + P_2 + P_3$$

$$P = \frac{x \cdot v}{2} + cv + \frac{y \cdot v}{2}$$

$$P = \frac{xv + 2cv + yv}{2}$$

$$P = \frac{(x + 2c + y)v}{2}$$

$$P = \frac{(x + c + y + c) \cdot v}{2}$$

$$P = \frac{(a + c) \cdot v}{2}$$

$$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$$

3. Izračunaj površinu trapeza ako je

$$a=8.4\text{cm}=84\text{mm}$$

$$c=6.5\text{cm}=65\text{mm}$$

$$v=53\text{mm}$$

$$P = ?$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$P = \frac{84+65}{2} \cdot 53$$

$$P = \frac{149}{2} \cdot 53$$

$$P = 74.5 \cdot 53$$

$$P = 3948.5\text{mm}^2$$

4. Izračunaj nepoznatu veličinu trapeza ako je

a)

$$P = 36\text{cm}^2$$

$$a = 9\text{cm}$$

$$c = 7\text{cm}$$

$$v=?$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

$$\frac{a+c}{2} \cdot v = P$$

$$\frac{9+7}{2} \cdot v = 36$$

$$\frac{16}{2} \cdot v = 36$$

$$v = \frac{36}{8}$$

$$v = 4.5\text{cm}$$

b)

$$P = 84\text{cm}^2$$

$$v = 7\text{cm}$$

$$a = 15\text{cm}$$

$$c=?$$

$$\frac{a+c}{2} \cdot v = P$$

$$\frac{15+c}{2} \cdot 7 = 84/\div 7$$

$$\frac{15+c}{2} = 12/\cdot 2$$

$$15+c = 24$$

$$c = 24 - 15$$

$$c = 9\text{cm}$$

c)

$$P = 35 \text{ cm}^2$$

$$v = 5 \text{ cm}$$

$$c = 6 \text{ cm}$$

$$a = ?$$

$$\frac{a+c}{2} \cdot v = P$$

$$\frac{a+6}{2} \cdot 5 = 35$$

$$\frac{a+6}{2} = 7 / \cdot 2$$

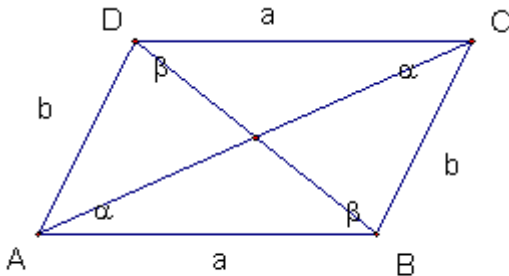
$$a+6 = 14$$

$$a = 14 - 6$$

$$a = 8 \text{ cm}$$

PARALELOGRAM

-PARALELOGRAM je četverokut koji ima dva para paralelnih stranica.



$$O = 2a + 2b$$

-Dijagonale PARALELOGRAMA se raspolavljaju.

$$|SA|=|SC| \text{ i } |SD|=|SB|$$

-Šiljasti kutevi su međusobno jednaki, tupi su također jednaki. Šiljasti i tupi kut zajedno daju 180° .

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Primjer: Šiljasti kut paralelograma iznosi 41° . Odredi veličine preostalih kutova u paralelogramu.

$$\underline{\alpha = 41^\circ}$$

$$\gamma = 41^\circ$$

$$\beta = 180^\circ - \gamma$$

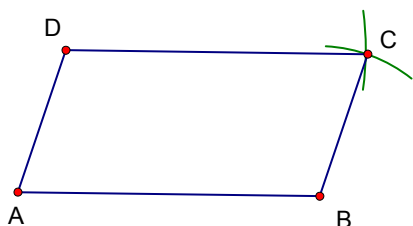
$$\beta = 180^\circ - 41^\circ$$

$$\beta = 139^\circ$$

$$\delta = \beta$$

$$\delta = 139^\circ$$

Primjer: Nacrtaj paralelogram čije su duljine stranica $a = 4\text{cm}$, $b = 2\text{cm}$. Izračunaj opseg tog paralelograma.



$$a = 4\text{ cm}$$

$$\underline{b = 2\text{ cm}}$$

$$O = ?$$

$$O = 2a + 2b$$

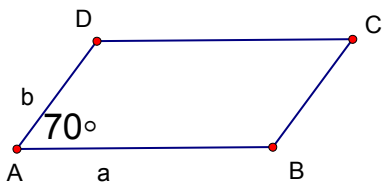
$$O = 2 \cdot 4 + 2 \cdot 2$$

$$O = 8\text{ cm} + 4\text{ cm}$$

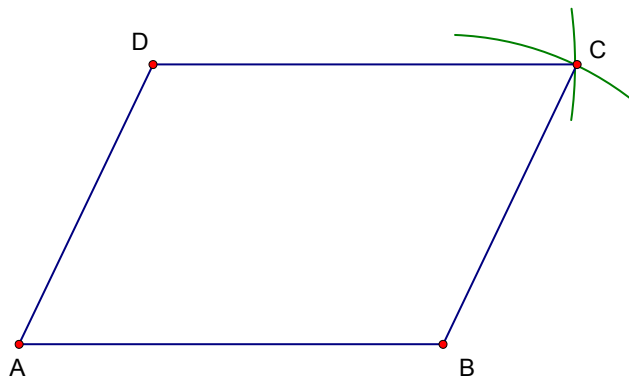
$$O = 12\text{ cm}$$

Primjer: Konstruiraj paralelogram ABCD ako je zadano $|AB| = 5.6\text{ cm}$, $|AD| = 4.1\text{ cm}$, $|\angle A| = 70^\circ$.

Skica:

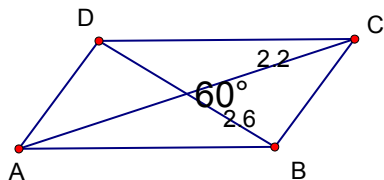


Konstrukcija:

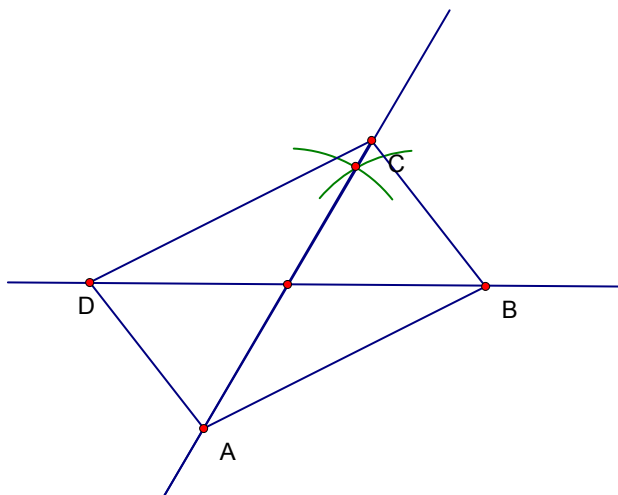


Primjer: Konstruiraj paralelogram ako je zadano $|AC|=4.4\text{cm}$, $|BD|=5.2\text{cm}$ i kut između dijagonala ima 60° .

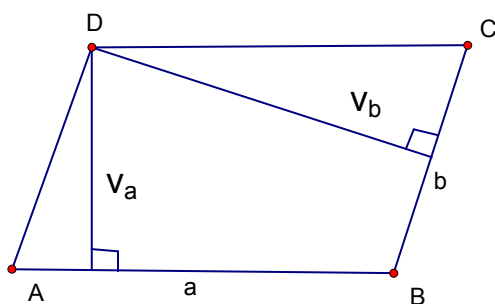
Skica:



Konstrukcija:



POVRŠINA PARALELOGRAMA



v_a -visina koja pripada stranici a

v_b -visina koja pripada stranici b

$$P = a \cdot v_a$$

$$P = b \cdot v_b$$

Površina paralelograma jednaka je umnošku duljine stranice i njoj odgovarajuće visine.

Primjer: Izračunaj površinu paralelograma ako je $a=12\text{cm}$, $v_a=7.5\text{cm}$.

$$\begin{aligned} a &= 12\text{cm} \\ \underline{v_a = 7.5\text{cm}} \\ P &= ? \end{aligned}$$

$$P = ?$$

$$P = a \cdot v_a$$

$$P = 12 \cdot 7.5$$

$$P = 90\text{cm}^2$$

Primjer: Izračunaj površinu paralelograma ako je $b=15\text{cm}$, $v_b=84\text{mm}$.

$$\begin{aligned} b &= 15\text{cm} \\ \underline{v_b = 84\text{mm} = 8.4\text{cm}} \end{aligned}$$

$$P = ?$$

$$P = b \cdot v_b$$

$$P = 15 \cdot 8.4$$

$$P = 126\text{cm}^2$$

Primjer: Odredi nepoznati element paralelograma:

a)

$$\begin{aligned} P &= 24\text{cm}^2 \\ \underline{v_a = 3.75\text{cm}} \\ a &= ? \end{aligned}$$

$$a = \frac{P}{v_a}$$

$$a = \frac{24}{3.75}$$

$$a = 6.4\text{cm}$$

b)

$$\begin{aligned} P &= 28.81\text{cm}^2 \\ \underline{b = 6.7\text{cm}} \\ v_b &= ? \end{aligned}$$

$$v_b = \frac{P}{b}$$

$$v_b = \frac{28.81}{6.7}$$

$$v_b = 4.3\text{cm}$$

Primjer: Odredi nepoznate veličine paralelograma:

$$a = 13\text{cm}$$

$$b = 8\text{cm}$$

$$v_a = 4.5\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$v_b = ?$$

$$P = a \cdot v_a$$

$$P = 13 \cdot 4.5$$

$$P = 58.5\text{cm}^2$$

$$v_b = \frac{P}{b}$$

$$v_b = \frac{58.5}{8}$$

$$v_b = 7.3125\text{cm}$$

Primjer: Odredi nepoznate veličine paralelograma:

$$O = 36.2\text{cm}$$

$$b = 9.6\text{cm}$$

$$v_a = 4.7\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$O = 2a + 2b$$

$$2a + 2b = O$$

$$2a + 2 \cdot 9.6 = 36.2$$

$$2a + 19.2 = 36.2$$

$$2a = 36.2 - 19.2$$

$$2a = 17$$

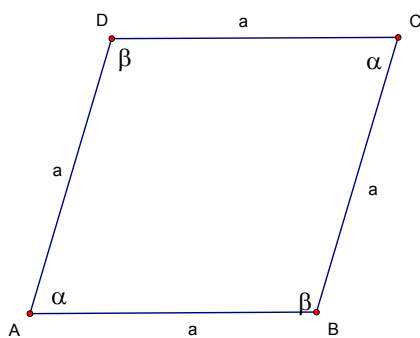
$$a = 8.5\text{cm}$$

$$P = a \cdot v_a$$

$$P = 8.5 \cdot 4.7$$

$$P = 39.95\text{cm}^2$$

ROMB je paralelogram kojemu susjedne stranice imaju jednake duljine.

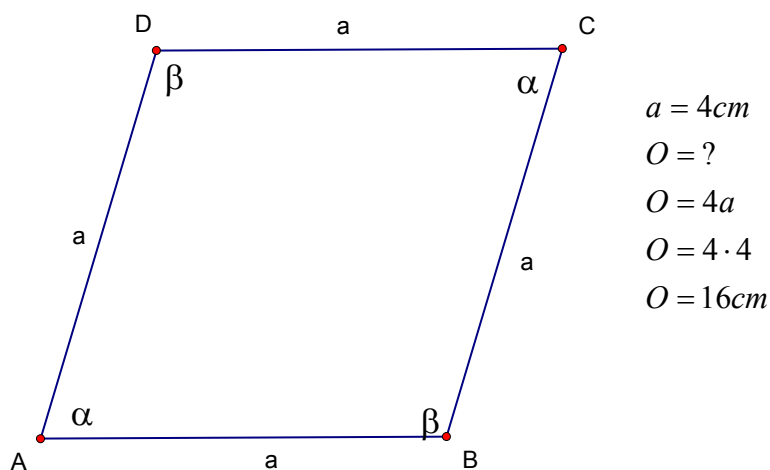


$$O = 4a$$

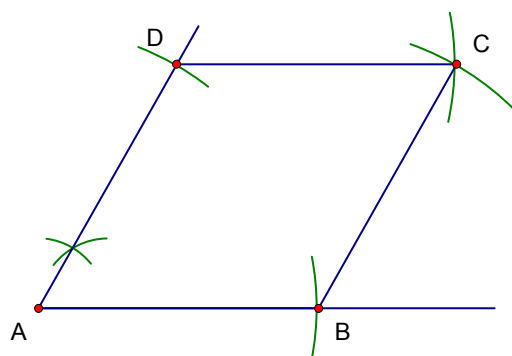
$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

Dijagonale romba se raspolavljaju. Nisu jednake duljine.

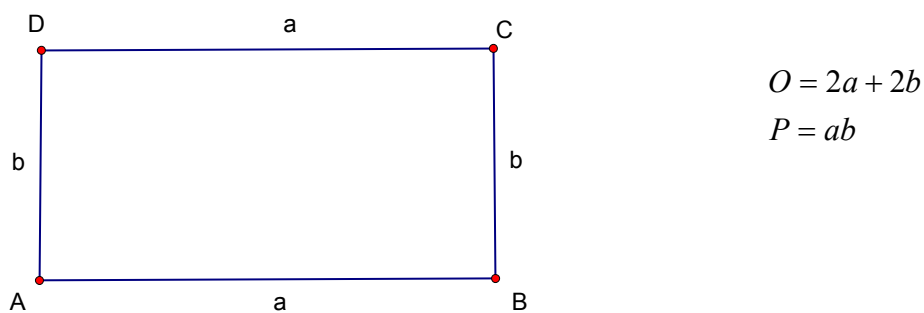
Primjer: Nacrtaj romb sa stranicama duljine 4cm. Izračunaj mu opseg.



Primjer: Konstruiraj romb sa stranicom duljine 37mm i šiljastim kutom od 60°.

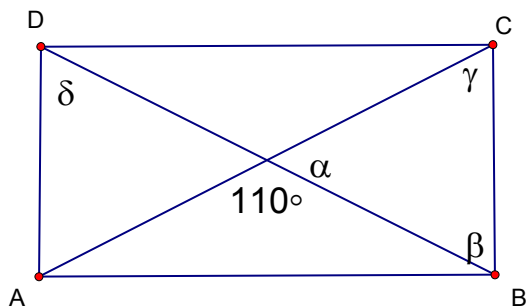


PRAVOKUTNIK je paralelogram kojemu su susjedne stranice međusobno okomite.



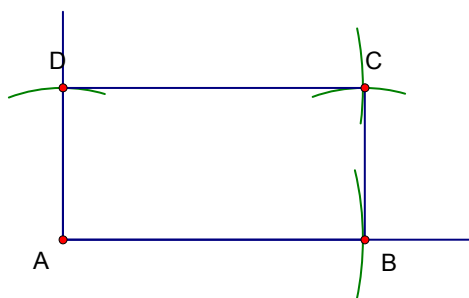
Dijagonale pravokutnika se raspolavljaju, jednake su duljine i nisu okomite.

Primjer: Odredi veličine kutova $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ako je četverokut ABCD pravokutnik.



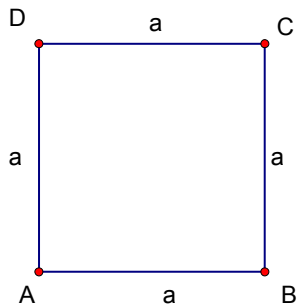
$$\begin{aligned}
 2\gamma &= 180^\circ - 70^\circ \\
 2\gamma &= 110^\circ \\
 \alpha &= 180^\circ - 110^\circ & \gamma &= 55^\circ \\
 \alpha &= 70^\circ & \beta &= \gamma \\
 & & \beta &= 55^\circ \\
 & & \delta &= \gamma \\
 & & \delta &= 55^\circ
 \end{aligned}$$

Primjer: Nacrtaj pravokutnik ABCD sa stranicama duljina 4 cm i 2 cm. Izračunaj mu opseg i površinu.



$$\begin{aligned}
 a &= 4\text{cm} & O &= 2(a + b) & P &= ab \\
 b &= 2\text{cm} & O &= 2(4 + 2) & P &= 4 \cdot 2 \\
 & & O &= 2 \cdot 6 & P &= 8\text{cm}^2 \\
 O &=? & O &= 12\text{cm} & & \\
 P &=? & & & &
 \end{aligned}$$

KVADRAT je paralelogram kojemu su susjedne stranice međusobno okomite i jednake duljine.

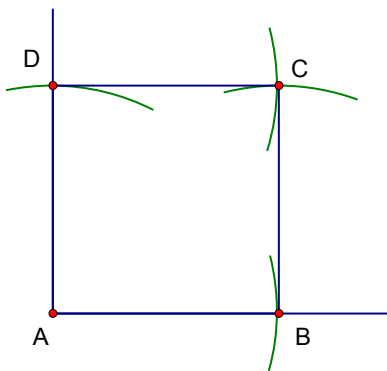


$$O = 4a$$

$$P = a \cdot a$$

Dijagonale kvadrata se raspolavljaju. Okomite su i jednake duljine.

Primjer: Nacrtaj kvadrat ABCD sa stranicama duljine 3cm. Izračunaj mu opseg i površinu.



$$a = 3\text{cm}$$

$$O, P = ?$$

$$O = 4a$$

$$O = 4 \cdot 3$$

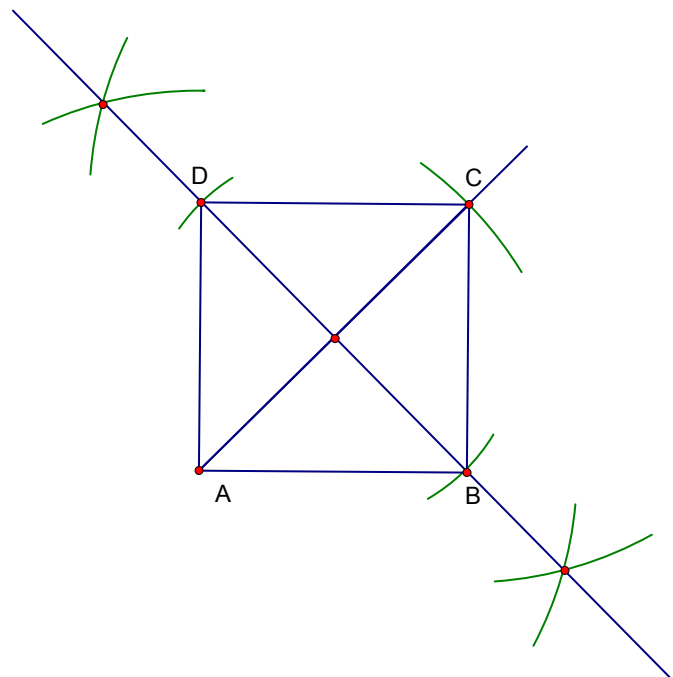
$$O = 12\text{cm}$$

$$P = a \cdot a$$

$$P = 3 \cdot 3$$

$$P = 9\text{cm}^2$$

Primjer: Konstruiraj kvadrat kojemu dijagonale imaju duljinu 5cm.



MNOGOKUTI

Osnovno o mnogokutima

Mnogokut je skup točaka ravnine omeđen s najmanje tri dužine.

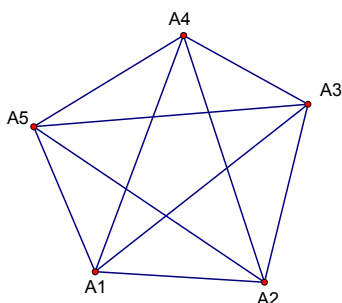
Sa n obilježavamo broj stranica. Ako je $n = 3$, mnogokut je trokut, $n = 4$, mnogokut je četverokut, ako je $n = 5$, mnogokut je peterokut, $n=6$, mnogokut je šesterokut, a mnogokut s n stranica ($n \geq 3$) zovemo n -terokut.

Mnogokuti čiji su unutarnji kutovi manji od 180° zovu se **konveksni mnogokuti**.

Mnogokuti koji imaju bar jedan unutarnji kut veći od 180° su **nekonveksni mnogokuti**.

Dijagonale mnogokuta

Dijagonale mnogokuta su dužine koje spajaju dva nesusjedna vrha mnogokuta. (Susjedni vrhovi su dva vrha mnogokuta koji pripadaju istoj stranici).



$\overline{A_1A_3}$, $\overline{A_1A_4}$, $\overline{A_2A_4}$, $\overline{A_2A_5}$, $\overline{A_3A_5}$ su dijagonale mnogokuta.

Broj dijagonala iz jednog vrha n -terokuta jednak je broju stranica umanjenom za 3.

$$dn = n - 3$$

Ukupan broj dijagonala u nekom n -terokutu je

$$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$$

Primjer :

Koliko vrhova ima mnogokut kojemu iz jednog vrha možeš nacrtati 27 dijagonala?

$$dn = 27$$

$$n = ?$$

$$dn = n - 3$$

$$27 = n - 3$$

$$n = 27 + 3$$

$$n = 30$$

O: Taj mnogokut ima 30 vrhova tj. 30 stranica.

Primjer :

Koliki je ukupan broj dijagonala u osmerokutu ?

$$n = 8$$

$$D_8 = ?$$

$$D_n = \frac{(n-3) \cdot n}{2}$$

$$D_8 = \frac{(8-3) \cdot 8}{2}$$

$$D_8 = \frac{5 \cdot 8}{2}$$

$$D_8 = 20$$

O: Osmerokut ima ukupno 20 dijagonala.

Primjer :

Koji mnogokut ima ukupno 90 dijagonala ?

$$Dn = 90$$

$$n = ?$$

$$Dn = \frac{n(n-3)}{2}$$

$$90 = \frac{n(n-3)}{2} \cdot 2$$

$$180 = n(n-3)$$

$$180 = 15 \cdot 12$$

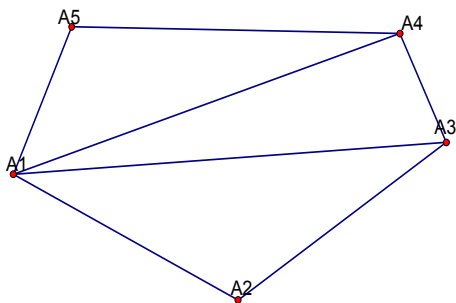
$$n = 15$$

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \begin{array}{l} \rangle \\ \rangle \\ \rangle \\ \rangle \\ \rangle \end{array} \begin{array}{l} \\ 12 \\ \\ 15 \\ \end{array}$$

O: Petnaesterokut ima ukupno 90 dijagonala.

Kutovi mnogokuta

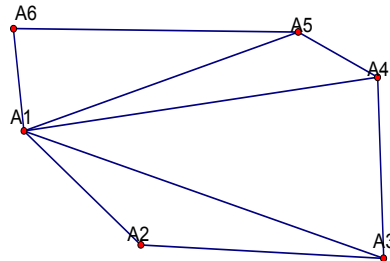
Nacrtaj peterokut i šesterokut pa im povuci dijagonale iz jednog vrha.



$n = 5$

$bt = 3$

$bt = \text{broj trokuta}$



$n = 6$

$bt = 4$

Kad povučemo dijagonale iz jednog vrha, mnogokut je podijeljen na $n-2$ trokuta.

U svakom trokutu zbroj veličina unutarnjih kutova je 180° , pa se zbroj veličina unutarnjih kutova u mnogokutu računa po formuli

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

Primjer :

Izračunaj zbroj veličina unutarnjih kutova u deseterokutu i dvanaesterokutu.

$$\underline{n = 10}$$

$$K_{10} = ?$$

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{10} = (10-2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{10} = 8 \cdot 180^\circ$$

$$K_{10} = 1440^\circ$$

$$\underline{n = 12}$$

$$K_{12} = ?$$

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{12} = (12-2) \cdot 180^\circ$$

$$K_{12} = 10 \cdot 180^\circ$$

$$K_{12} = 1800^\circ$$

Primjer:

Koji mnogokut ima zbroj veličina unutarnjih kutova 2340° ?

$$K_n = 2340^\circ$$

$$n = ?$$

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$2340^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$n-2 = \frac{2340^\circ}{180^\circ}$$

$$n-2 = 13$$

$$n = 13 + 2$$

$$n = 15$$

ili

$$K_n = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$2340^\circ = (n-2) \cdot 180^\circ$$

$$2340^\circ = 180^\circ \cdot n - 360^\circ$$

$$180^\circ \cdot n = 2340^\circ + 360^\circ$$

$$180^\circ \cdot n = 2700^\circ$$

$$n = \frac{2700^\circ}{180^\circ}$$

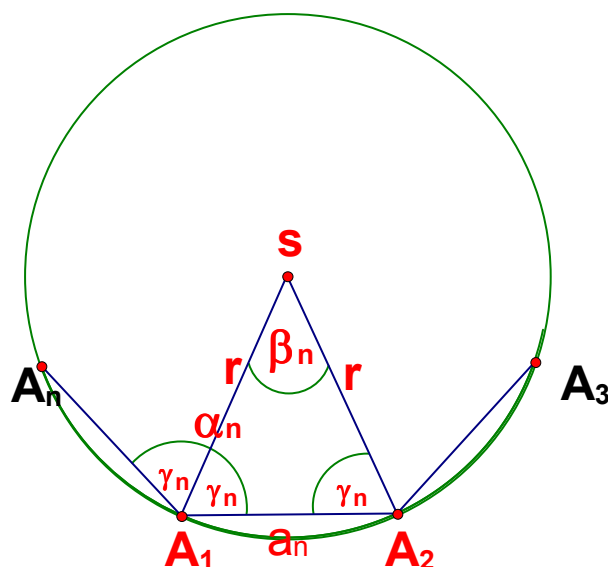
$$n = 15$$

Petnaesterokut ima zbroj veličina unutarnjih kutova 2340° .

Mnogokuti čije su sve stranice jednake duljine i svi kutovi jednake veličine su **pravilni mnogokuti**.

Pravilni n-terokut može se podijeliti na n sukladnih karakterističnih jednakokračnih trokuta .

Pravilan trokut je jednakostraničan trokut a pravilan četverokut je kvadrat .



β_n - središnji kut pravilnog n - terokuta

α_n - kut pravilnog n - terokuta

γ_n - kut uz osnovicu karakterističnog trokuta
pravilnog n - terokuta

$$\beta_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$\alpha_n = 2\gamma_n = 180^\circ - \beta_n$$

ili

$$\alpha_n = \frac{K_n}{n}$$

$$\alpha_n = \frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$$

Opseg mnogokuta je zbroj duljina svih njegovih stranica .

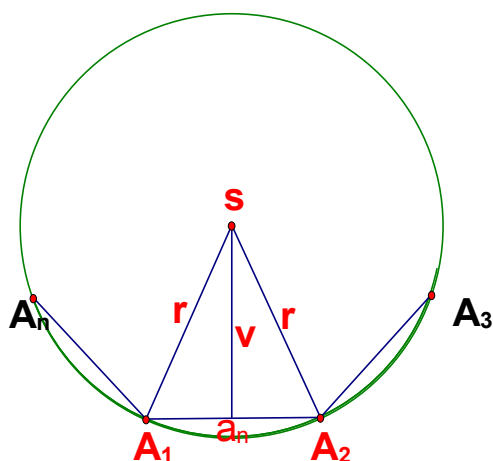
$$O = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

Opseg pravilnog mnogokuta

$$O = n \cdot a$$

Površina pravilnog mnogokuta

Površina pravilnog n- terokuta jednaka je n površina karakterističnog trokuta .



$$P = n \cdot P_{\Delta} \quad P = n \cdot \frac{a_n \cdot v}{2}$$

(v je visina karakterističnog trokuta , odnosno polumjer upisane kružnice pravilnom n- terokutu)

KRUG I KRUŽNICA

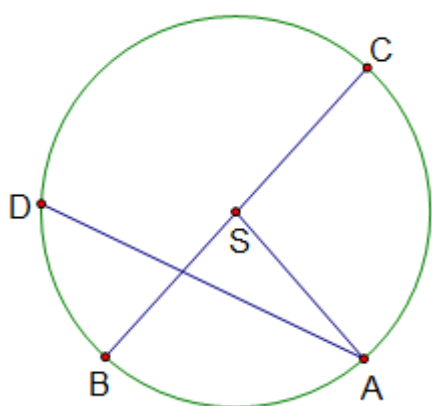
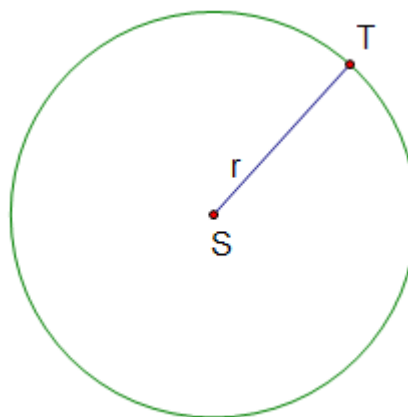
Kružnica je skup svih točaka ravnine koje su od zadane točke S jednako udaljene za pozitivni iznos r .

Krug je dio ravnine omeđen kružnicom.

Krug je skup točaka ravnine čija je udaljenost od zadane točke S manja ili jednaka polumjeru.

S – središte kružnice (kruga)

r – radijus



Dužina \overline{SA} - **polumjer** (dužina koja spaja središte sa bilo kojom točkom kružnice).

Dužina \overline{AD} - **tetiva** (dužina čije rubne točke pripadaju kružnici).

Dužina \overline{BC} - **promjer** (dužina čije rubne točke pripadaju kružnici i sadrži središte).

Dio kružnice BAC – **polukružnica**.

Dio kružnice ACD – **kružni luk** (dio kružnice između dvije njezine točke).

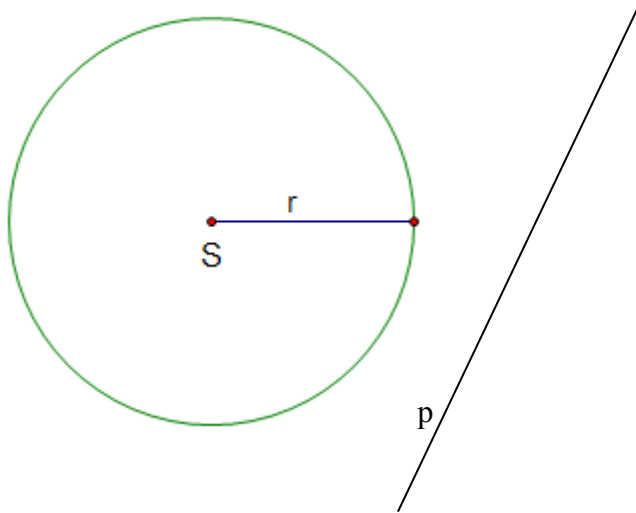
Dio kruga DBAD – **kružni odsječak** (dio kruga omeđen tetivom i kružnim lukom)

Dio kruga ACSA – **kružni isječak** (dio kruga omeđen polumjerima i kružnim lukom).

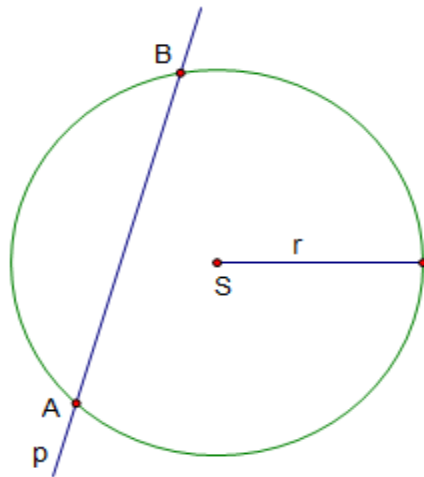
dio kruga BCDB – **polukrug**.

Pravac i kružnica

- Pravac nema sa kružnicom zajedničkih točaka. Pravac je izvan kružnice, tj. kružnica i pravac se ne sijeku.

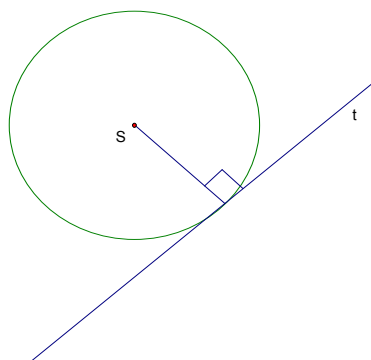


- Pravac ima s kružnicom 2 zajedničke točke. Pravac je **sekanta** kružnice.



- Pramac s kružnicom ima 1 zajedničku točku.

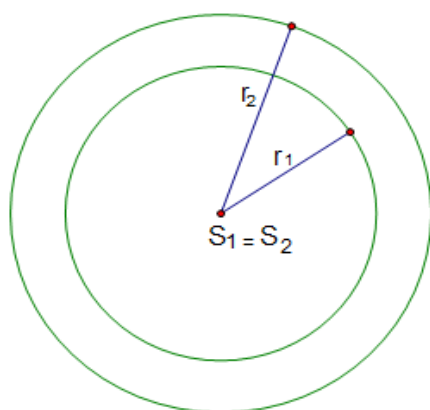
Pramac je **tangenta** kružnice.



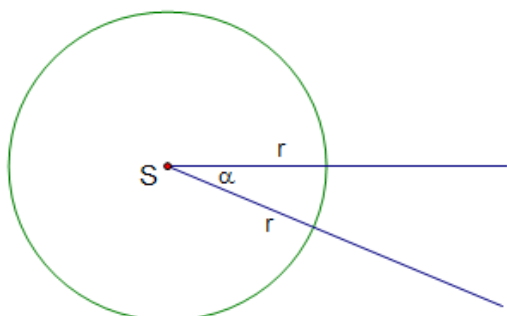
Tangenta kružnice je pravac koji dira kružnicu u jednoj točki i okomit je na polumjer u toj točki.

Koncentrične kružnice imaju zajedničko središte.

Kružni vijenac je dio ravnine omeđen dvjema koncentričnim kružnicama.

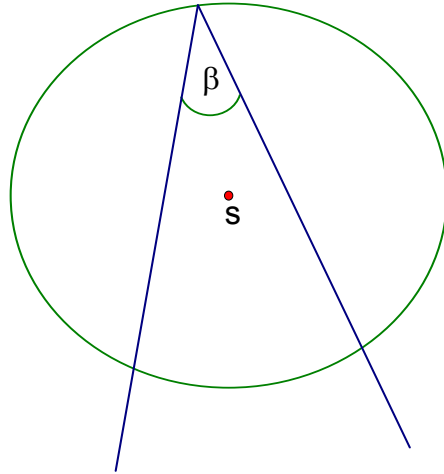


Središnji kut ima vrh u središtu kružnice, a kraci su polupravci koji sadrže polumjere. Središnji kut je veći od 0° , a manji od 360° .

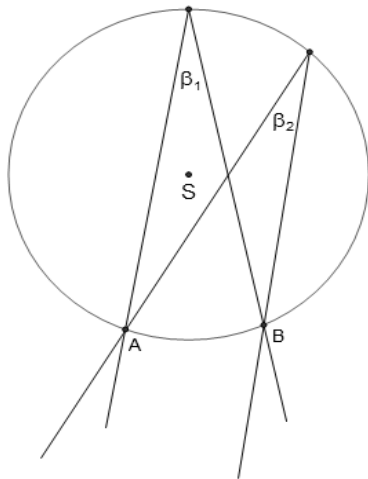


α – središnji kut

Obodni kut ima vrh na kružnici, a kraci su polupravci koji sadrže tetive.

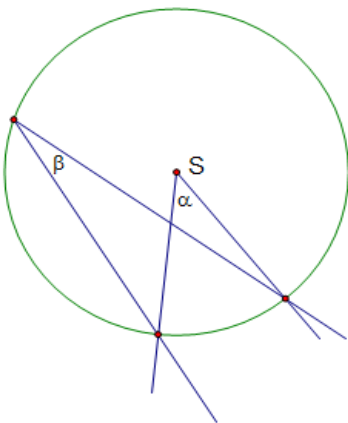


Obodni kutovi nad istim kružnim lukom međusobno su jednake veličine.



$$\beta_1 = \beta_2$$

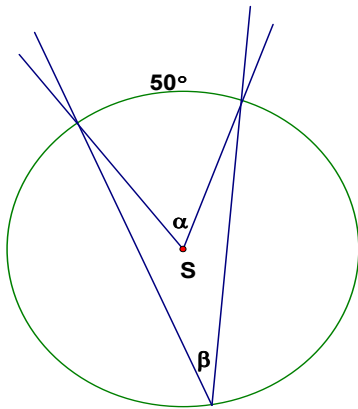
Veličina središnjeg kuta jednaka je dvostrukoj veličini obodnog kuta nad istim kružnim lukom.



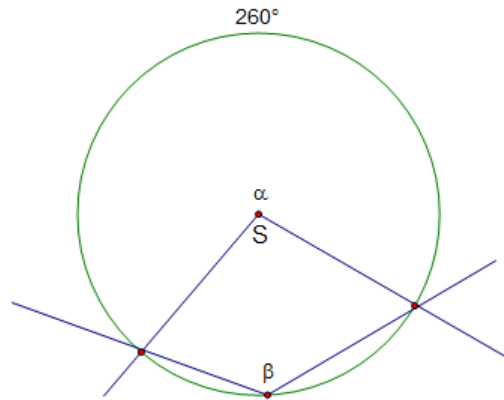
$$\alpha = 2\beta$$

SREDIŠNJI KUT OBODNI KUT

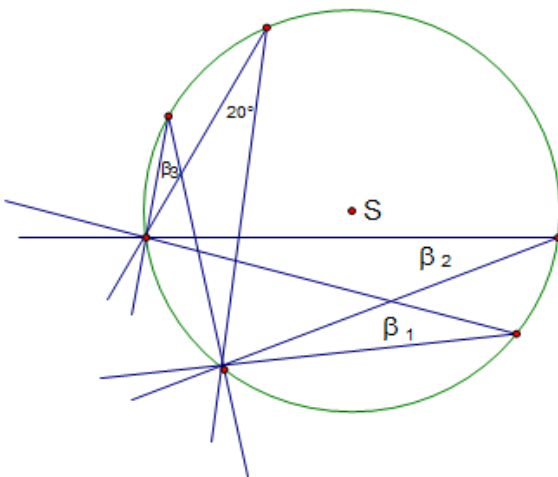
Primjeri:



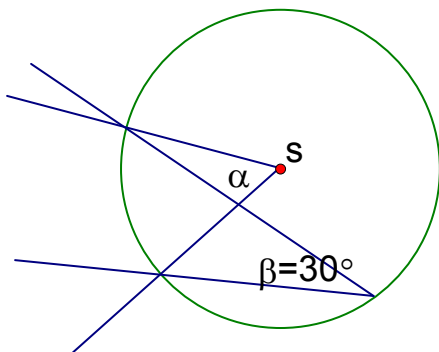
$$\begin{aligned} \alpha &= 50^\circ \\ \alpha &= 2\beta \\ 50^\circ &= 2\beta \\ \beta &= \frac{50^\circ}{2} \\ \beta &= 25^\circ \end{aligned}$$



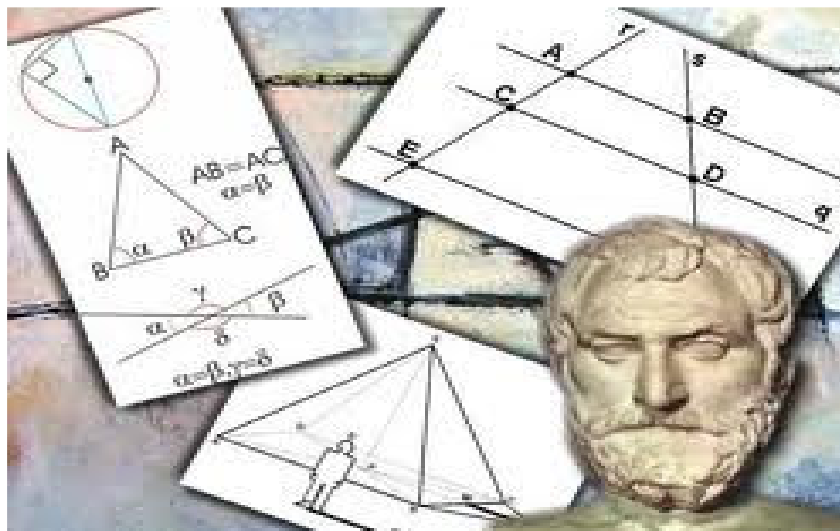
$$\begin{aligned} \alpha &= 260^\circ \\ \beta &= ? \\ \alpha &= 2\beta \\ \beta &= \frac{\alpha}{2} \\ \beta &= \frac{260^\circ}{2} \\ \beta &= 130^\circ \end{aligned}$$



$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 20^\circ$
(obodni kutovi nad istim kružnim lukom)

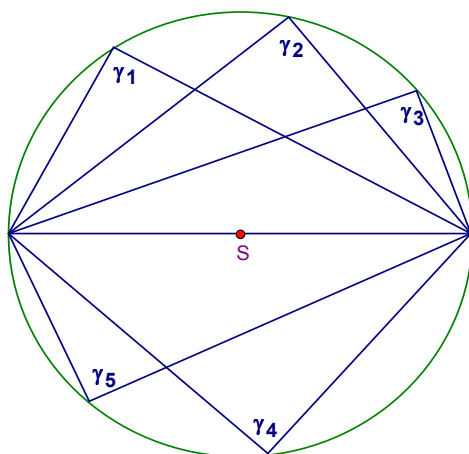


$$\begin{aligned} \beta &= 30^\circ \text{ (obodni kut)} \\ \alpha &= 2 \cdot \beta \\ \alpha &= 2 \cdot 30^\circ \\ \alpha &= 60^\circ \text{ (središnji kut nad istim kružnim lukom)} \end{aligned}$$



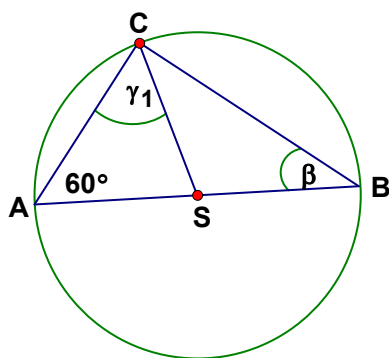
TALESOV POUČAK - SVAKI OBOJNI KUT NAD PROMJEROM KRUŽNICE JE PRAVI KUT.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma_4 = \gamma_5 = 90^\circ$$



Primjer :

Odredi γ_1 i β primjenom Talesova poučka.



$$|AS| = |CS| = r$$

$$\gamma_1 = 60^\circ$$

$$\angle C = 90^\circ \text{ (PO TALESOVU POUČKU)}$$

$$\beta = 90^\circ - 60^\circ$$

$$\beta = 30^\circ$$

Duljina kružnice (opseg kruga omeđen tom kružnicom)

$$\frac{O}{2r} = \pi$$

$$O = 2r \pi \quad (\pi \approx 3.14)$$

Primjer :

Izračunaj duljinu kružnice ako je radijus $r = 6 \text{ cm}$.

$$r = 6 \text{ cm}$$

$$O = ?$$

$$O = 2r \pi$$

$$O = 2 \cdot 6 \pi \text{ cm}$$

$$O = 12 \pi \text{ cm}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu polumjera ako je opseg kruga 62.8 cm .

$$O = 62.8 \text{ cm}$$

$$r = ?$$

$$O = 2r \pi$$

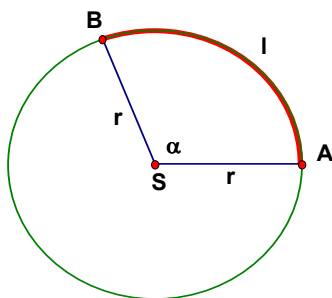
$$62.8 \text{ cm} = 2 \cdot r \cdot 3.14$$

$$62.8 \text{ cm} = 6.28 \cdot r$$

$$r = \frac{62.8}{6.28} \text{ cm}$$

$$r = 10 \text{ cm}$$

Duljina kružnog luka l i veličina njemu pridruženog središnjeg kuta α proporcionalne su veličine .



DULJINA KRUŽNOG LUKA l	VELIČINA ODGOVARAJUĆEG SREDIŠNJEG KUTA α
$2r\pi$	360°
$\frac{2r\pi}{360^\circ}$	1°
$\frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot 2^\circ$	2°
$\frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot 3^\circ$	3°
$\frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$	α

$$l : 2r\pi = \alpha : 360^\circ$$

$$l \cdot 360^\circ = 2r\pi \cdot \alpha$$

$$l = \frac{2r\pi}{360^\circ} \cdot \alpha$$

$$l = \frac{r\pi}{180^\circ} \cdot \alpha \quad \text{ili} \quad l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu kružnog luka ako je radijus $r = 3 \text{ cm}$, a odgovarajući središnji kut $\alpha = 30^\circ$.

$$r = 3 \text{ cm}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$l = ?$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180}$$

$$l = \frac{3^1 \cdot \pi \cdot 30^{\circ 1}}{180^{\circ 2}} \text{ cm}$$

$$l = \frac{\pi}{2} \text{ cm}$$

$$l = 1.57 \text{ cm}$$

Primjer :

Koliki je radijus kružnice ako je središnjem kutu α veličine 60° pridružen kružni luk duljine $l = 6.28 \text{ cm}$?

$$\alpha = 60^\circ$$

$$l = 6.28 \text{ cm}$$

$$r = ?$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

$$6.28 = \frac{r \cdot 3.14 \cdot \cancel{60}^{\circ 1}}{180^\circ_3}$$

$$6.28 = \frac{r \cdot 3.14}{3} / \cdot 3$$

$$6.28 \cdot 3 = r \cdot 3.14$$

$$r = \frac{6.28 \cdot 3}{3.14}$$

$$r = 6 \text{ cm}$$

Primjer :

Izračunaj veličinu središnjeg kuta α kojemu u kružnici radijusa $r = 18 \text{ cm}$ pripada kružni luk duljine $l = 18.84 \text{ cm}$.

$$r = 18 \text{ cm}$$

$$l = 18.84 \text{ cm}$$

$$\alpha = ?$$

$$l = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

$$18.84 = \frac{\cancel{18}^1 \cdot 3.14 \cdot \alpha}{180^\circ_{10}}$$

$$18.84 = \frac{3.14 \cdot \alpha}{10^\circ} / \cdot 10$$

$$188.4 = 3.14 \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{188.4}{3.14}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

Primjer:

U kružnicu promjera 12cm upisan je trokut ΔABC kojemu su veličine kutova $\beta=33^\circ$ i $\gamma=102^\circ$.

Izračunaj duljine kružnih lukova

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

$$l_{\widehat{AB}} = \frac{6 \cdot 3.14 \cdot 204^\circ}{180^\circ}$$

$$l_{\widehat{AB}} = 21.352\text{cm}$$

$$l_{\widehat{AC}} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

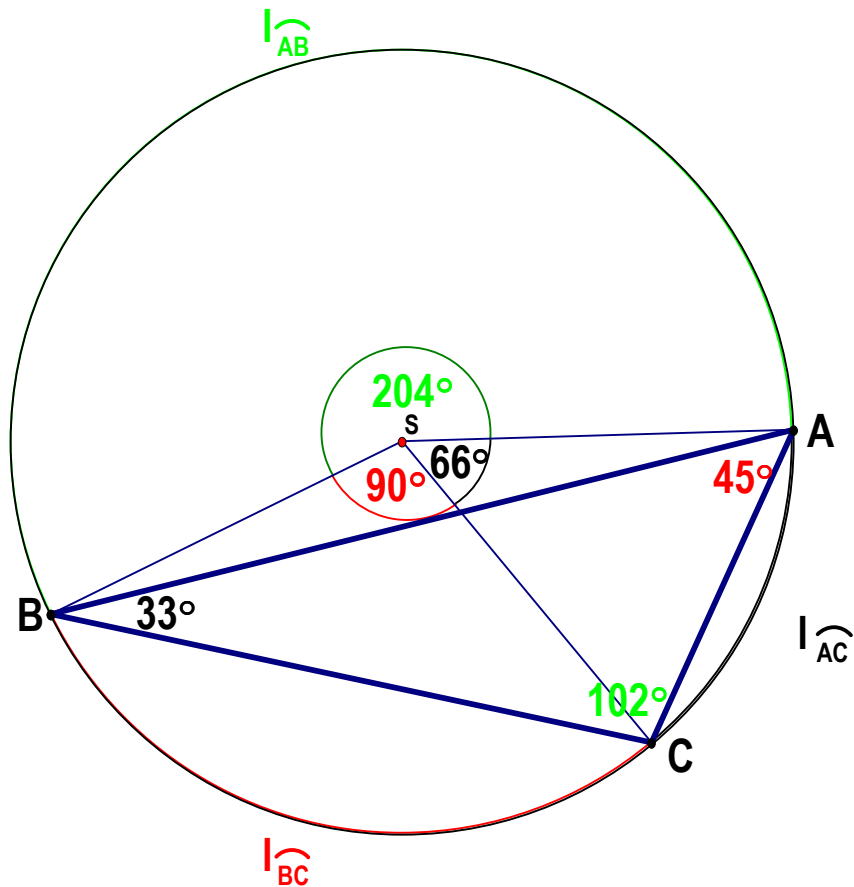
$$l_{\widehat{AC}} = \frac{6 \cdot 3.14 \cdot 66^\circ}{180^\circ}$$

$$l_{\widehat{AC}} = 6.908\text{cm}$$

$$l_{\widehat{BC}} = \frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$$

$$l_{\widehat{BC}} = \frac{6 \cdot 3.14 \cdot 90^\circ}{180^\circ}$$

$$l_{\widehat{BC}} = 9.42\text{cm}$$



Kako se može provjeriti točnost izračunatih duljina kružnih lukova ?

$$O = 2r\pi$$

$$O = 12 \cdot 3.14\text{cm}$$

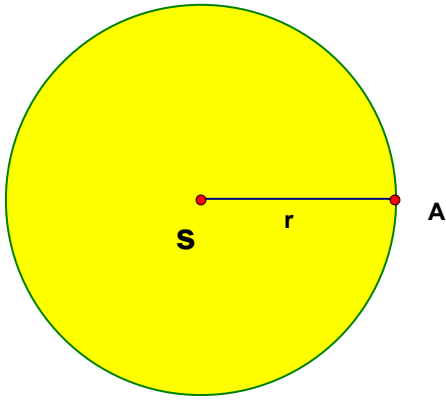
$$O = 37.68\text{cm}$$

$$O = l_{\widehat{AB}} + l_{\widehat{AC}} + l_{\widehat{BC}}$$

$$O = (21.352 + 6.908 + 9.42)\text{cm}$$

$$O = 37.68\text{cm}$$

Površina kruga radijusa r



$$P = r \cdot r \cdot \pi$$

$$P = r^2 \cdot \pi$$

Primjer :

Izračunaj površinu kruga čiji je radijus $r = 8 \text{ cm}$.

$$r = 8 \text{ cm}$$

$$P = ?$$

$$P = r^2 \pi$$

$$P = 8^2 \pi \text{ cm}^2$$

$$P = 64 \pi \text{ cm}^2$$

$$P = 64 \cdot 3.14 \text{ cm}^2$$

$$P = 200.96 \text{ cm}^2$$

Primjer :

Krug ima površinu 78.5 cm^2 . Koliki je njegov promjer?

$$P = 78.5 \text{ cm}^2$$

$$2r = ?$$

$$P = r^2 \pi$$

$$78.5 = r^2 \cdot 3.14$$

$$r^2 = \frac{78.5}{3.14}$$

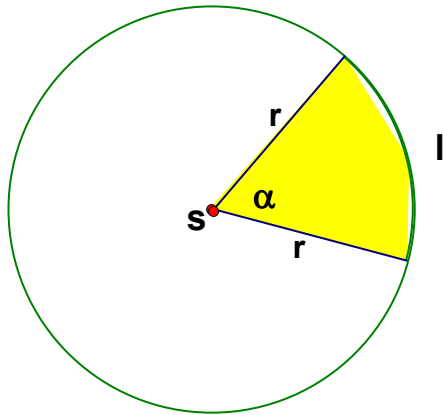
$$r^2 = 25$$

$$r \cdot r = 25$$

$$r = 5 \text{ cm}$$

$$2r = 10 \text{ cm}$$

Površina kružnog isječka P_i i veličina pridruženog središnjeg kuta α proporcionalne su veličine pa vrijedi :



$$P_i : r^2 \pi = \alpha : 360^\circ \quad P_i \cdot 360^\circ = r^2 \pi \cdot \alpha$$

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ} \quad P_i = \frac{r \pi \alpha}{180^\circ} \cdot \frac{r}{2} \quad P_i = \frac{l \cdot r}{2}$$



duljina kružnog luka

Primjer :

Kolika je površina kružnog isječka kruga čiji je radijus 3 cm a veličina središnjeg kuta 40° ?

$$\begin{aligned} \alpha &= 40^\circ \\ r &= 3 \text{ cm} \\ P_i &= ? \end{aligned}$$

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$$

$$P_i = \frac{3^2 \cdot \pi \cdot 40^\circ}{360^\circ} \text{ cm}^2$$

$$P_i = \frac{9^1 \cdot \pi \cdot 40^{\circ 1}}{360_1^\circ}$$

$$P_i = \pi \text{ cm}^2$$

$$P_i = 3.14 \text{ cm}^2$$

Primjer :

Izračunaj veličinu središnjeg kuta α kružnog isječka kojemu u krugu polumjera $r = 9$ cm odgovara površina od 14.13 cm^2 .

$$P_i = 14.13 \text{ cm}^2$$

$$r = 9 \text{ cm}$$

$$\alpha = ?$$

$$P_i = \frac{r^2 \pi \alpha}{360^\circ}$$

$$14.13 = \frac{\cancel{9} \cdot 9 \cdot 3.14 \cdot \alpha}{\cancel{360} \substack{40}}$$

$$14.13 = \frac{9 \cdot 3.14 \cdot \alpha}{40^\circ} \cdot 40$$

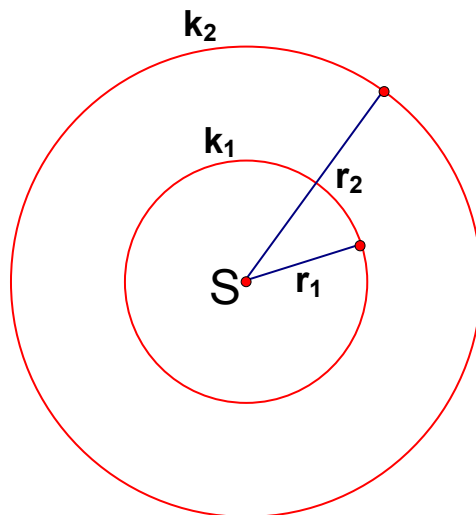
$$14.13 \cdot 40 = 9 \cdot 3.14 \cdot \alpha$$

$$565.2 = 28.26 \alpha$$

$$\alpha = \frac{565.2}{28.26}$$

$$\alpha = 20^\circ$$

OPSEG I POVRŠINA KRUŽNOG VIJENCA



$$P_v = r_2^2 \pi - r_1^2 \pi$$

$$P_v = (r_2^2 - r_1^2) \pi$$

$$O_v = 2r_1 \pi + 2r_2 \pi$$

$$O_v = 2\pi(r_1 + r_2)$$

Primjer:

Izračunaj površinu kružnog vijenca ako je $r_1 = 3\text{cm}$, $r_2 = 7\text{cm}$.

$$P_v = (r_2^2 - r_1^2) \cdot \pi$$

$$P_v = (7^2 - 3^2) \cdot \pi \text{ cm}^2$$

$$P_v = (49 - 9) \cdot \pi \text{ cm}^2$$

$$P_v = 40 \pi \text{ cm}^2$$

$$P_v = 40 \cdot 3.14 \text{ cm}^2$$

$$P_v = 125.6 \text{ cm}^2$$

Koordinatni sustav na pravcu

Pravac x je brojevni pravac ako na njemu odredimo dvije točke O i E , tako da točki O pridružimo broj 0 , a točki E broj 1 . Dužina \overline{OE} zove se **jedinična dužina**.

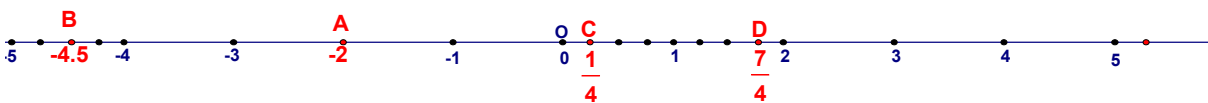
Brojeve pridružene točkama brojevnog pravca nazivamo koordinatama.

Zato pravac x zovemo **koordinatna os x** . Broj x koji smo pridružili točki T brojevnog pravca naziva se **koordinata točke T** i piše se **$T(x)$** , a čita se T s koordinatom iks.

Primjer :

Na koordinatnoj osi x odredi točke s koordinatama :

$$A(-2), B(-4.5), C\left(\frac{1}{4}\right), D\left(\frac{7}{4}\right).$$



Uređeni par

- (a,b) čitaj „uređeni par a,b “
- a je prvi član uređenog para
- b je drugi član uređenog para
- uređeni parovi su jednaki ako su prvi i drugi članovi jednaki

Primjer:

a) Napiši sve uređene parove brojeva (x,y) za koje vrijedi $x+y = 5$,

$$x \text{ i } y \in \mathbb{N}_0.$$

$$(0,5) (5,0) (1,4) (4,1) (2,3) (3,2)$$

b) Provjeri točnost jednakosti uređenih parova:

$$(0.5 - 1, 2) = \left(\frac{1}{2} : 2 - \frac{3}{4}, 1:0.5\right)$$

$$0.5 - 1 = \frac{1}{2} : 2 - \frac{3}{4} \quad 2=1:0.5$$

$$-0.5 = -\frac{1}{2} \quad 2=10:5$$

$$-\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \quad 2=2$$

c) Odredi x i y da uređeni parovi budu jednaki

$$\left(\frac{2x}{3} + 1, 2y\right) = \left(5, y - \frac{y-3}{2}\right)$$

$$\frac{2x}{3} + 1 = 5 / \cdot 3 \quad 2y = y - \frac{y-3}{2} / \cdot 2$$

$$2x + 3 = 15 \quad 4y = 2y - (y-3)$$

$$2x = 15 - 3 \quad 4y = 2y - y + 3$$

$$2x = 12 \quad 4y - 2y + y = 3$$

$$x = \frac{12}{2} \quad 3y = 3$$

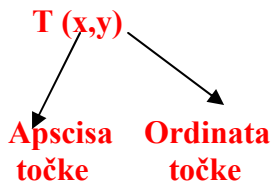
$$x = 6 \quad y = 1$$

Koordinatni sustav u ravnini

Služi nam za određivanje položaja točaka u ravnini.

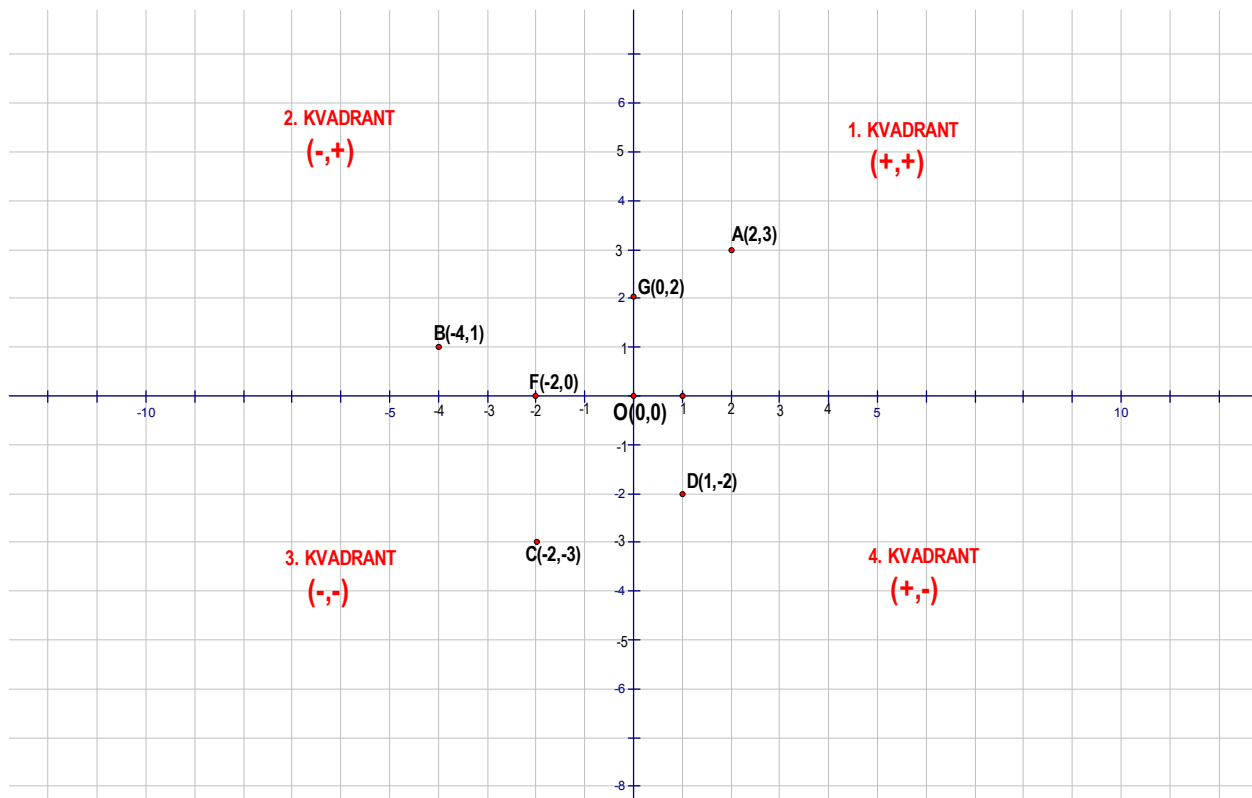
O(0,0) je ishodište pravokutnog koordinatnog sustava.

Postoje 4 kvadranta, 1.kvadrant (+,+), 2.kvadrant (-,+), 3.kvadrant (-,-), 4.kvadrant (+,-)



Primjer : Ucrtaj točke u koordinatni sustav

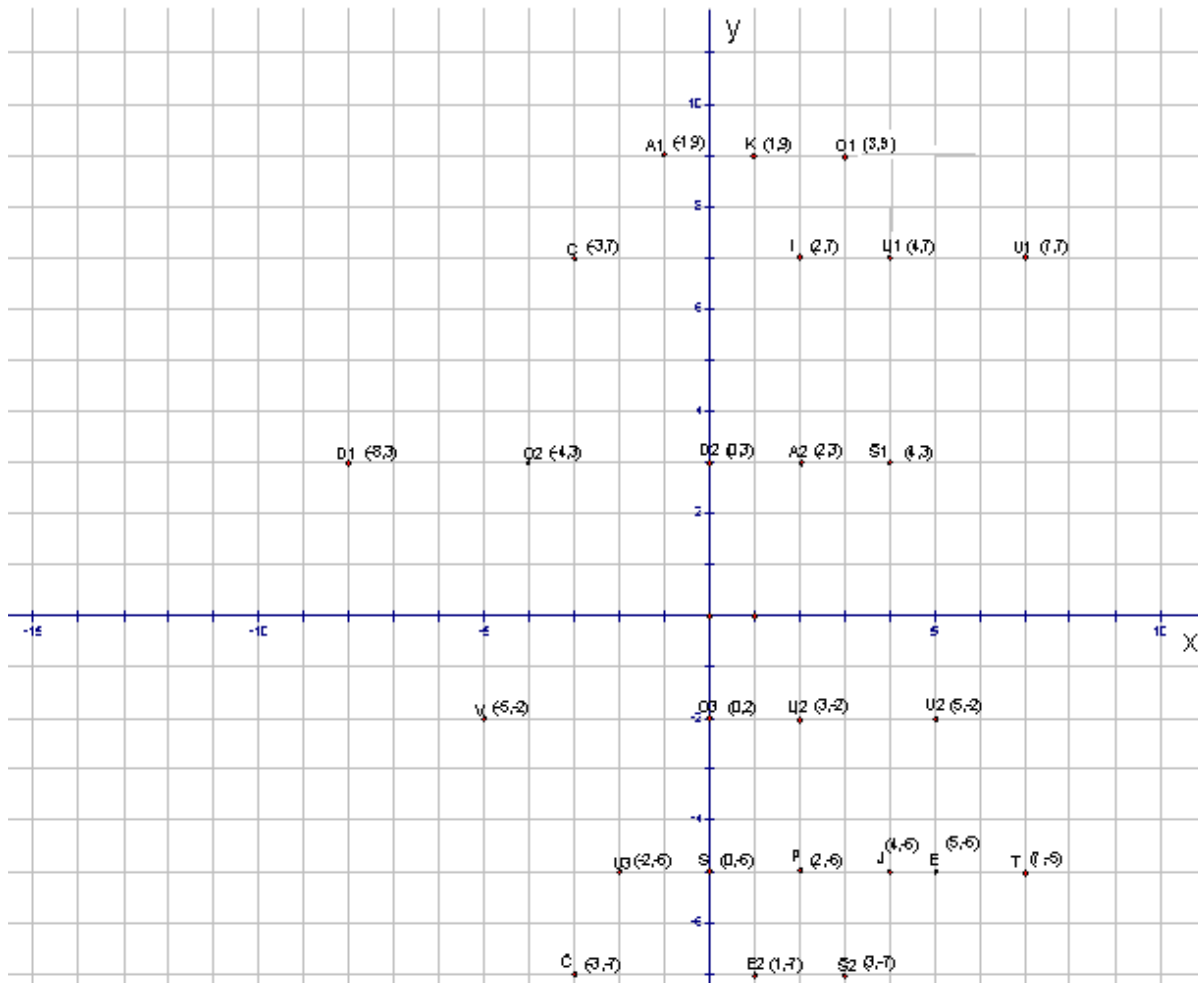
A(2,3), B(-4,1), C(-2,-3), D(1,-2), F(-2,0), G(0,2)



Primjer :

Ucrtaj točke u pravokutni koordinatni sustav. Svaki red je jedna riječ određene misli. Slova čitaj bez indeksa i napiši misao.

Ć (-3,-7) , A₁ (-1,9) , Lj₁ (4,7) , O₂ (-4,3) , A₂ (2,3) , Lj₂ (3,-2) , U₂ (5,-2) , U₁(7,7) ,
O₁ (3,9) , K (1,9) , I (2,7) , E₂ (1,-7) , S (0,-5) , D₁ (-8,3) , D₂ (0,3) , E₁ (5,-5) , C (-3,7)
Š₁ (4,3) , V (-5,-2) , J (4,-5) , T (7,-5) , O₃(0,-2) , U₃ (-2,-5) , P (2,-5) , Š₂ (3,-7)



Misao je : „AKO CILJU DODAŠ VOLJU, USPJET ČEŠ.“

LINEARNA FUNKCIJA

Funkcija je postupak kojim na određeni način svakom elementu jednog skupa pridružujemo jedan i samo jedan element drugog skupa.

Označavamo $f : A \rightarrow B$, a čitamo : „f je funkcija sa A u B“.

Opći oblik linearne funkcije je $f(x)=y=ax+b$.

a i b su koeficijenti, a x je argument funkcije (nezavisna varijabla), a $f(x)=y$ je vrijednost funkcije (zavisna varijabla).

Primjer 1. Ana je odlučila kupiti novi kompjuter. Za rođendan je dobila 1000 kn, a ostatak će sakupiti dnevnom štednjom od po 20kn.

- Napiši formulu ovisnosti novca $f(x)=y$ o danima štednje x..
- Koliko će novca Ana imati nakon 30 dana štednje?
- Kompjuter košta 6000 kn . Koliko će dana trajati Anina štednja?

a) $f(x) = y = 20x+1000$

b) $f(x)=20x+1000$

$$f(30) = 20 \cdot 30 + 1000$$

$$f(30) = 600 + 1000$$

$$f(30) = 1600$$

Nakon 30 dana štednje Ana će imati 1600kn.

c) $f(x)=20x+1000$

$$6000 = 20x + 1000$$

$$20x = 6000 - 1000$$

$$20x = 5000$$

$$x = \frac{5000}{20} = 250$$

Ana treba štedjeti 250 dana da bi kupila kompjuter.

Primjer :

Napiši linearnu funkciju ako je $a=2$, $b=-3$, pa odredi vrijednost funkcije ako je argument $x=4$.

$$f(x)=ax+b$$

$$f(x)=2x-3$$

$$f(4)=2 \cdot 4 - 3$$

$$f(4)=8-3$$

$$f(4)=5$$

Ako je argument $x=4$, vrijednost funkcije je 5.

Primjer :

Zadana je linearna funkcija $f(x)=\frac{2}{3}x-1$. Za koji argument x zadana linearna funkcija poprima vrijednost -2 ?

$$f(x)=\frac{2}{3}x-1$$

$$-2=\frac{2}{3}x-1/3$$

$$-6=2x-3$$

$$2x-3=-6$$

$$2x=-6+3$$

$$2x=-3$$

$$x=-\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right)=-2$$

Vrijednost funkcije $f(x)=\frac{2}{3}x-1$ je -2 za argument $x=-\frac{3}{2}$.

Graf linearne funkcije $f(x)=ax+b$ je pravac čija je jednadžba $y=ax+b$.

$y=ax+b$ je **eksplicitni** oblik jednadžbe pravca.

a-koeficijent smjera (nagib pravca)

b-odsječak pravca na y osi

Ako je $a>0$ pravac sa pozitivnim smjerom osi x zatvara šiljasti kut i taj je kut veći što je a veći.
Funkcija $f(x)=ax+b$ za $a>0$ je **rastuća**.

Ako je $a<0$ pravac sa negativnim smjerom osi x zatvara tupi kut i taj je kut veći što je a veći.
Funkcija $f(x)=ax+b$ za $a<0$ je **padajuća**.

Grafove linearnih funkcija možemo crtati :

1. pomoću tablice –uređenih parova (x,y)
- 2.pomoću a (nagib) i b (osječak na osi y)
- 3.pomoću točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi.

Primjer:

Zadani su koeficijenti linearne funkcije $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$.

- napiši linearnu funkciju
- odredi je li funkcija rastuća ili padajuća
- napiši jednadžbu pravca
- nacrtaj pravce na sva tri načina

a) $f(x) = ax + b$
 $f(x) = \frac{1}{2}x - 1$

b) funkcija je rastuća jer je $a = \frac{1}{2} > 0$.

c) $y = \frac{1}{2}x - 1$

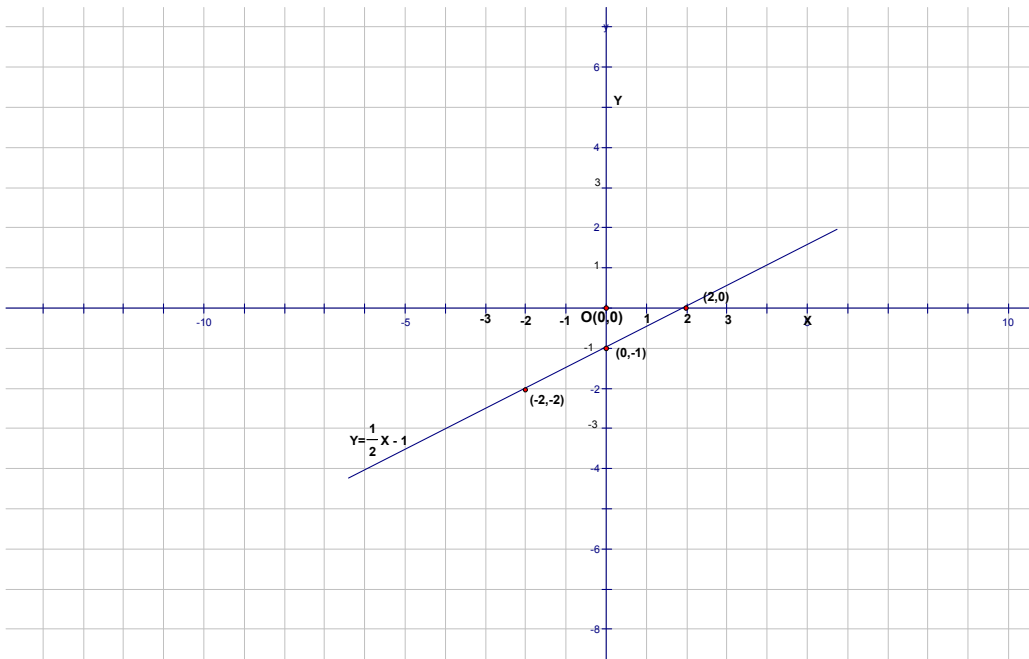
d) tablica

X	$y = \frac{1}{2}x - 1$	
-2	-2	(-2,-2)
0	-1	(0,-1)
2	0	(2,0)

$$y = \frac{1}{2} \cdot (-2) - 1 = -1 - 1 = -2$$

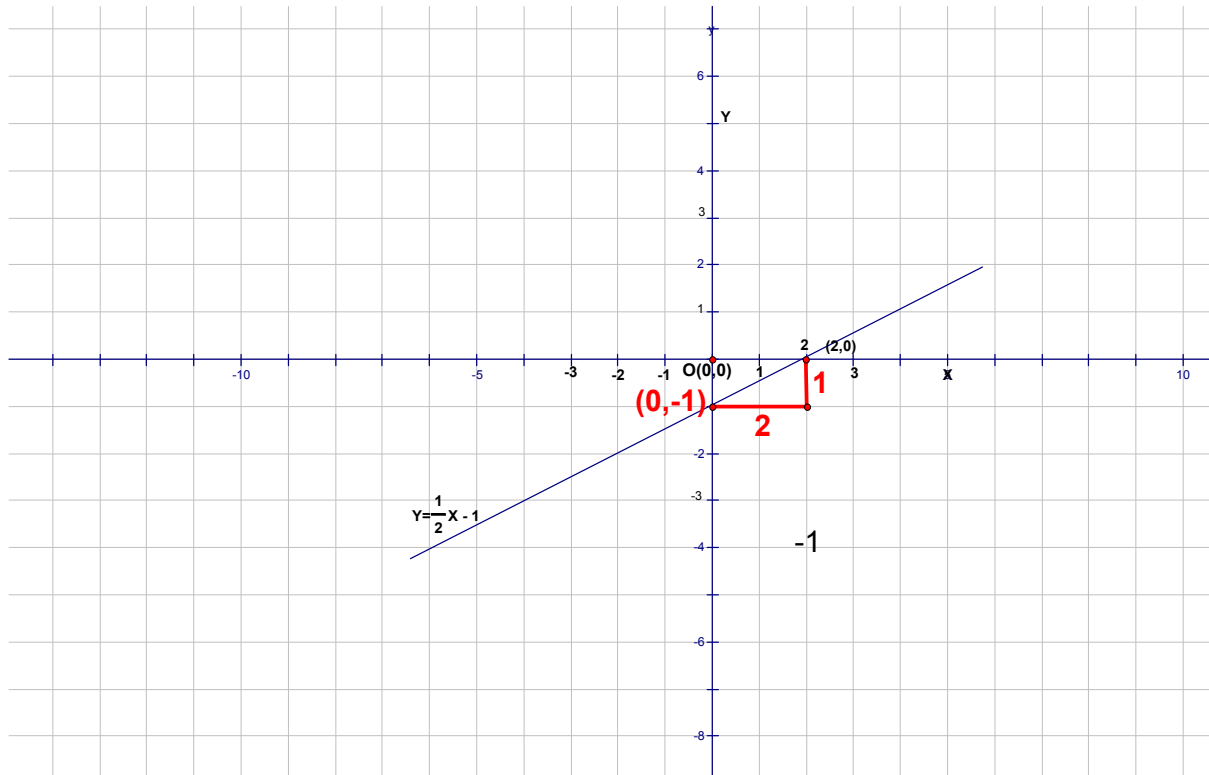
$$y = \frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot 2 - 1 = 0$$



Pomoću a i b

$b=-1$, $a = \frac{1(\text{gore})}{2(\text{desno})}$, a ako je $a < 0$ onda se ide za nazivnik desno(lijevo), a za brojnik dole (gore).



Pomoću točaka u kojima pravac siječe koordinatne osi.

$$y = \frac{1}{2}x - 1$$

Siječe os y **B(0,b)**

$$\mathbf{B(0,-1)}$$

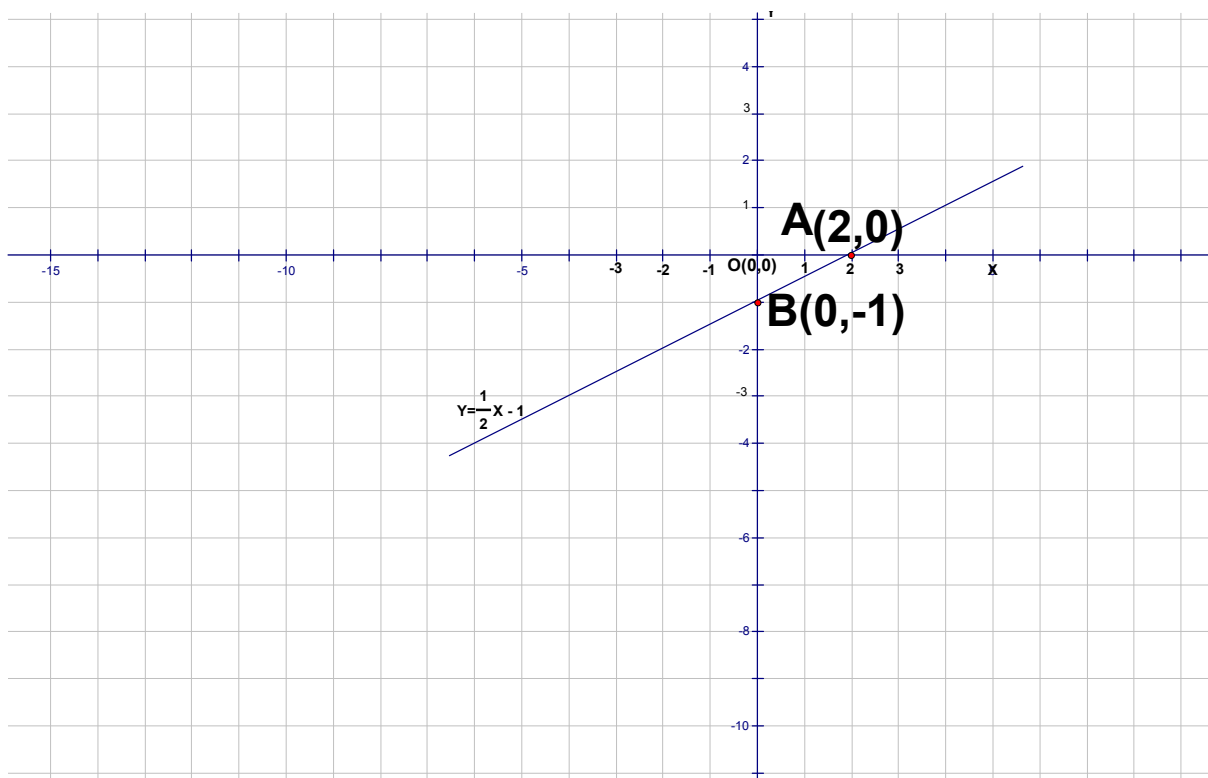
Siječe os x za $y=0$

$$0 = \frac{1}{2}x - 1 \cdot 2$$

$$0 = x - 2$$

$$\mathbf{x=2 \text{ (NUL točka)}}$$

$$\mathbf{A(2,0)}$$



Točka pripada pravcu ako koordinate točke zadovoljavaju jednadžbu pravca.

Primjer : Provjeri računski da li točka A(3,5) pripada pravcu $y=2x-1$.

$$\begin{aligned}
 &A(3,5) \\
 &y=2x-1 \\
 &5=2 \cdot 3-1 \\
 &5=6-1 \\
 &5=5
 \end{aligned}$$

Točka A(3,5) pripada pravcu koji je zadan jednadžbom $y=2x-1$.

Primjer : Odredi a u jednadžbi pravca $y=ax+2$ ako mu pripada točka T(-3,-1).

$$\begin{aligned}
 &T(-3,-1) \\
 &y=ax+2 \\
 &-1=a \cdot (-3)+2 \\
 &-1=-3a+2 \\
 &3a=2+1 \\
 &3a=3 \\
 &a=1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Jednadžba pravca glasi} \quad &y=1 \cdot x+2 \\
 &y=x+2
 \end{aligned}$$

Paralelni pravci imaju nagib (koeficijent smjera) jednak.

$y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ su **paralelni** ako je $a_1 = a_2$

Primjeri:

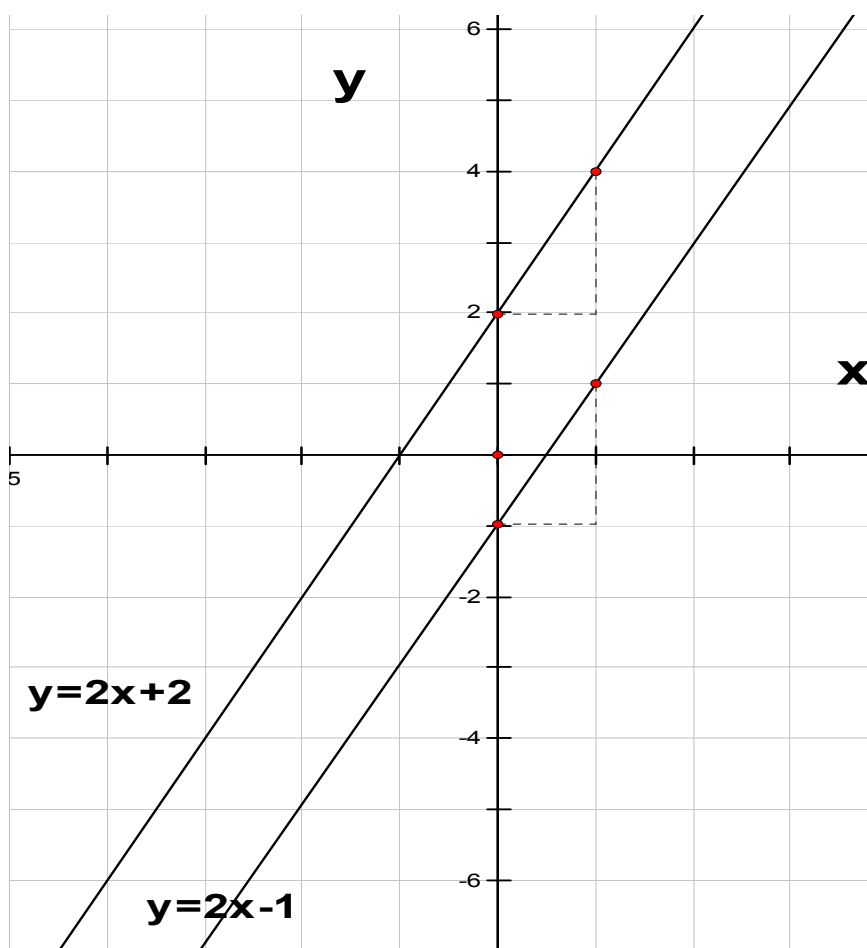
Nacrtaј pravce $y = 2x - 1$ i $y = 2x + 2$

$$a = \frac{2}{1}$$

$$a = 2$$

$$b = -1$$

$$b = 2$$

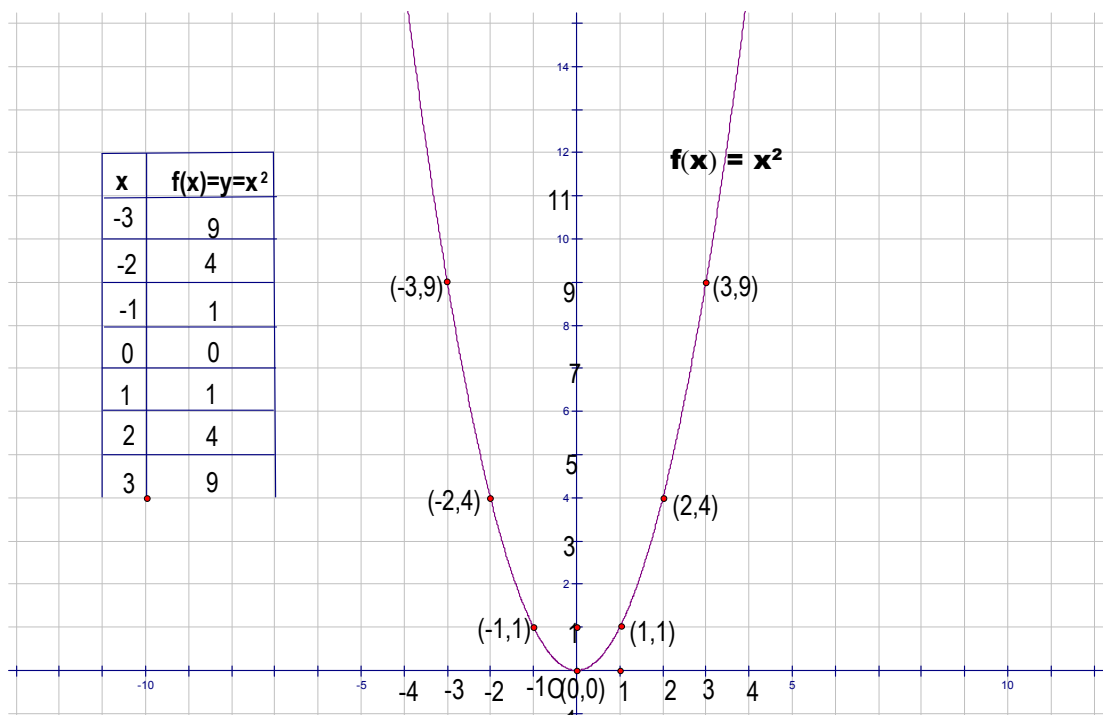


Okomiti pravci imaju nagib (koeficijent smjera) suprotan i recipročan .

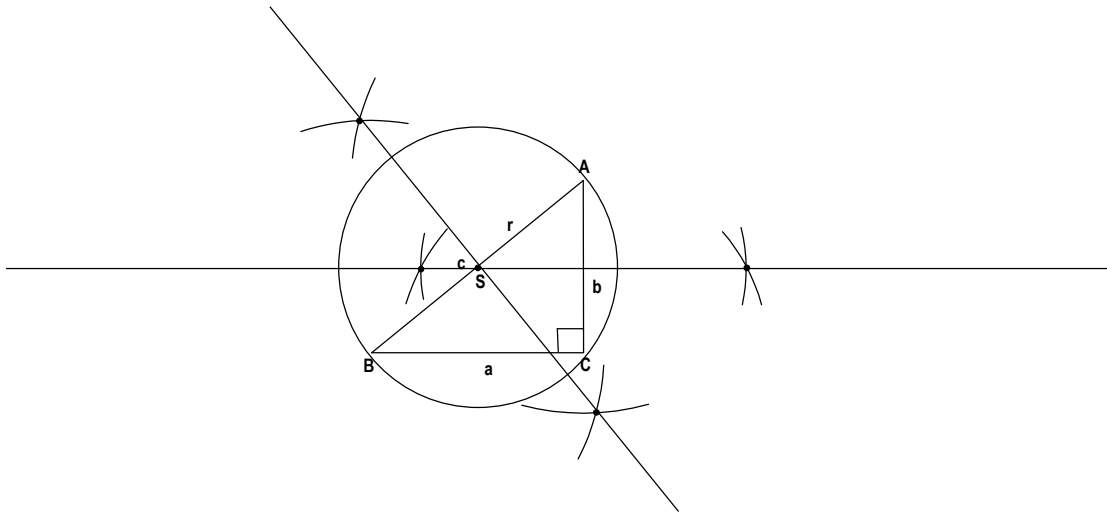
$y = a_1x + b_1$ i $y = a_2x + b_2$ su **okomiti** ako je $a_2 = -\frac{1}{a_1}$

GRAF FUNKCIJE $f(x) = x^2$

Funkcija koja svakom broju x pridružuje broj x^2 je funkcija kvadriranja i zapisujemo je $f(x) = y = x^2$. Funkciju kvadriranja možemo grafički predočiti u koordinatnoj ravnini tako da za proizvoljno odabrane brojeve x odredimo vrijednosti funkcije $f(x) = x^2$. Svakom uređenom paru (x, x^2) pridružena je točka u koordinatnoj ravnini. Skup svih točaka $(x, y = x^2)$ je krivulja koja se zove PARABOLA. Graf funkcije kvadriranja $f(x) = x^2$ je parabola a $y = x^2$ je njena jednažba .



Pravokutan trokut



a,b – katete

c – hipotenuza

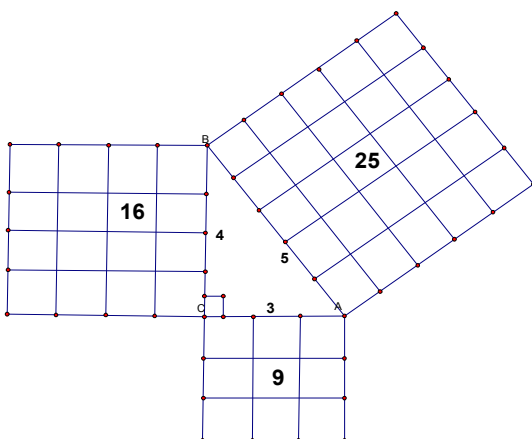
$$O = a + b + c$$

$$P = \frac{a \cdot b}{2} \text{ ili } P = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

$$r = \frac{c}{2}$$

1.dokaz Pitagorina poučka

$$a^2 + b^2 = c^2$$



$$4^2 + 3^2 = 5^2$$

$$16 + 9 = 25$$

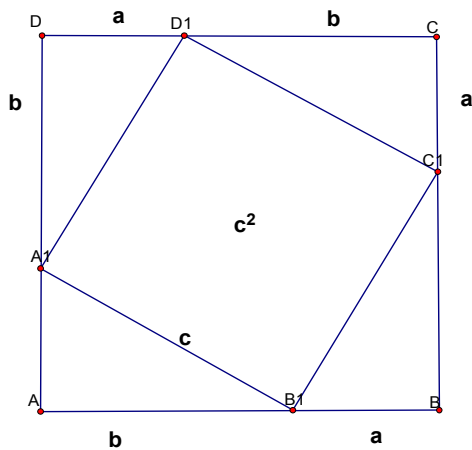
$$25 = 25$$

Zbroj površina kvadrata nad katetama jednak je površini kvadrata nad hipotenuzom.

Za svaki pravokutan trokut vrijedi da je zbroj kvadrata duljina kateta jednak kvadratu duljine hipotenuze.

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad a^2 = c^2 - b^2 \quad b^2 = c^2 - a^2$$

2. dokaz Pitagorina poučka



$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$P_{ABCD} = P_{A_1B_1C_1D_1} + 4 \cdot P_{AB_1A_1}$$

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot b}{2}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Primjer:

Izračunaj duljinu hipotenuze pravokutnog trokuta ako su zadane duljine kateta:

$$a = 9\text{cm}$$

$$b = 12\text{cm}$$

$$c = ?$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 9^2 + 12^2$$

$$c^2 = 81 + 144$$

$$c^2 = 225 / \sqrt{\quad}$$

$$c = \sqrt{225}$$

$$c = 15\text{cm}$$

Primjer:

Izračunaj duljinu nepoznate katete ABC s pravim kutom pri vrhu C ako je:

a) $a = 15\text{mm}$

$c = 39\text{mm}$

$\frac{b = ?}{b = ?}$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 39^2 - 15^2$$

$$b^2 = 1521 - 225$$

$$b^2 = 1296$$

$$b = \sqrt{1296}$$

$$b = 36\text{mm}$$

b) $b = 1\text{dm}$

$c = 1.45\text{ dm}$

$\frac{a = ?}{a = ?}$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$a^2 = 1.45^2 - 1^2$$

$$a^2 = 2.1025 - 1$$

$$a^2 = 1.1025$$

$$a = \sqrt{1.1025}$$

$$a = 1.05\text{dm}$$

Obrat Pitagorina poučka

Ako za duljine stranica a,b,c nekog trokuta vrijedi jednakost $a^2 + b^2 = c^2$, onda je taj trokut pravokutan.

Primjer:

Zadane su duljine hipotenuze i jedne katete pravokutnog trokuta $\sqrt{3}$ cm i 2 cm.. Provjeri je li duljina druge katete 1 cm .

$c = 2\text{cm}$ $c > a$ $2 > \sqrt{3}$

$a = \sqrt{3}\text{ cm}$

$\frac{b = ?}{b = ?}$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 2^2 - (\sqrt{3})^2$$

$$b^2 = 4 - 3$$

$$b^2 = 1$$

$$b = \sqrt{1}$$

$$b = 1\text{cm}$$

Da, duljina druge katete je 1 cm.

4. Je li trokut sa zadanim duljinama stranica pravokutan ?

$a = 5\text{cm}$

$b = 7\text{cm}$

$c = 11\text{cm}$

Ne, ovaj trokut nije pravokutan jer mu zbroj kvadrata duljina kateta nije jednak kvadratu duljine hipotenuze.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$5^2 + 7^2 \neq 11^2$$

$$25 + 49 \neq 121$$

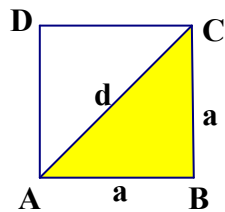
$$74 \neq 121$$

Primjena Pitagorina poučka na kvadrat

$$O = 4 \cdot a$$

$$P = a^2$$

$$P = \frac{d^2}{2}$$



$$d^2 = a^2 + a^2$$

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$d^2 = 2a^2$$

$$d = \sqrt{2a^2}$$

$$a = \frac{d\sqrt{2}}{2}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu dijagonale kvadrata kojemu su duljine stranice:

a) $\underline{a = 4\text{cm}}$

$$d = ?$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 4\sqrt{2} \text{ cm}$$

b) $\underline{a = 4\sqrt{2}}$

$$d = ?$$

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$d = 4(\sqrt{2})^2$$

$$d = 4 \cdot 2$$

$$d = 8\text{cm}$$

Primjer :

Izračunaj opseg i površinu kvadrata ako mu je duljina dijagonale:

$$d = 20\text{mm}$$

a) O, P = ?

$$d = a\sqrt{2}$$

$$20 = a\sqrt{2}$$

$$a = \frac{20}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$a = \frac{20\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2}$$

$$a = \frac{20\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 10\sqrt{2}\text{mm}$$

$$P = a^2$$

$$P = (10\sqrt{2})^2 \text{mm}^2$$

$$P = 10^2 \cdot (\sqrt{2})^2 \text{mm}^2$$

$$P = 100 \cdot 2 \text{mm}^2$$

$$P = 200 \text{mm}^2$$

$$O = 4 \cdot a$$

$$O = 4 \cdot 10\sqrt{2}$$

$$O = 40\sqrt{2} \text{ mm}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu dijagonale i površinu kvadrata ako je opseg:

$$O = 24\text{cm}$$

d, P = ?

$$d = a\sqrt{2}$$

$$d = 6\sqrt{2} \text{ cm}$$

$$P = a^2$$

$$P = 6^2 \text{ cm}^2$$

$$O = 4 \cdot a$$

$$24 = 4 \cdot a$$

$$a = \frac{24}{4} \text{ cm}$$

$$a = 6\text{cm}$$

$$P = 36\text{cm}^2$$

Primjer :

Izračunaj duljinu dijagonale i opseg kvadrata ako je površina kvadrata:

$$a) P = 9\text{cm}^2$$

$$d, O = ?$$

$$P = a^2$$

$$9 = a^2$$

$$a = \sqrt{9}\text{cm}$$

$$a = 3\text{cm}$$

$$d = a\sqrt{2}$$

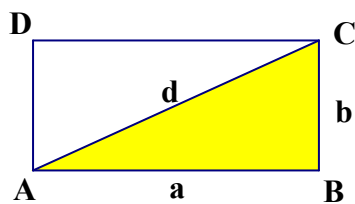
$$d = 3\sqrt{2}\text{cm}$$

$$O = 4 \cdot a$$

$$O = 4 \cdot 3 \text{ cm}$$

$$O = 12\text{cm}$$

Primjena Pitagorina poučka na pravokutnik



$$P = a \cdot b$$

$$O = 2(a+b)$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = d^2 - b^2$$

$$b^2 = d^2 - a^2$$

Primjer :

Izračunaj duljinu dijagonale pravokutnika ako su mu duljine stranice:

a) $a = 9\text{cm}$

$\underline{b = 12\text{cm}}$

$d = ?$

$$d^2 = 9^2 + 12^2$$

$$d^2 = 81 + 144$$

$$d^2 = 225$$

$$d = \sqrt{225}$$

$$d = 15\text{cm}$$

b) $a = 3.5\text{cm}$

$\underline{b = 1.2\text{cm}}$

$d = ?$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$d^2 = 3.5^2 + 1.2^2$$

$$d^2 = 12.25 + 1.44$$

$$d^2 = 13.69$$

$$d = \sqrt{13.69}$$

$$d = 3.7\text{cm}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu nepoznate stranice pravokutnika ako je zadana duljina jedne stranice i dijagonale:

a) $a = 11\text{cm}$

$\underline{d = 61\text{cm}}$

$b = ?$

$$b^2 = d^2 - a^2$$

$$b^2 = 61^2 - 11^2$$

$$b^2 = 3721 - 121$$

$$b^2 = 3600$$

$$b = \sqrt{3600}$$

$$b = 60\text{cm}$$

b) $b = 36\text{mm}$

$\underline{d = 45\text{mm}}$

$a = ?$

$$a^2 = d^2 - b^2$$

$$a^2 = 45^2 - 36^2$$

$$a^2 = 2025 - 1296$$

$$a^2 = 729$$

$$a = \sqrt{729}$$

$$a = 27\text{mm}$$

Primjer:

Izračunaj opseg i površinu pravokutnika ako su zadane stranica a i dijagonala d :

$$a = 18 \text{ mm}$$

$$d = 82 \text{ mm}$$

$$O, P = ?$$

$$O = 2(a+b)$$

$$P = a \cdot b$$

$$b^2 = d^2 - a^2$$

$$O = 2(18+80)\text{mm}$$

$$P = 18 \cdot 80 \text{ mm}^2$$

$$b^2 = 82^2 - 18^2$$

$$O = 2 \cdot 98 \text{ mm}$$

$$P = 1440 \text{ mm}^2$$

$$b^2 = 6724 - 324$$

$$O = 196 \text{ mm}$$

$$b^2 = 6400$$

$$b = \sqrt{6400}$$

$$b = 80 \text{ mm}$$

Primjer :

Izračunaj duljinu dijagonale pravokutnika ako su zadani opseg i duljina jedne stranice pravokutnika:

$$a = 33 \text{ mm}$$

$$O = 178 \text{ mm}$$

$$d = ?$$

$$O = 2a + 2b$$

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$178 = 2 \cdot 33 + 2b$$

$$d^2 = 33^2 + 56^2$$

$$178 = 66 + 2b$$

$$d^2 = 1089 + 3136$$

$$2b = 178 - 66$$

$$d^2 = 4225$$

$$2b = 112 \text{ mm}$$

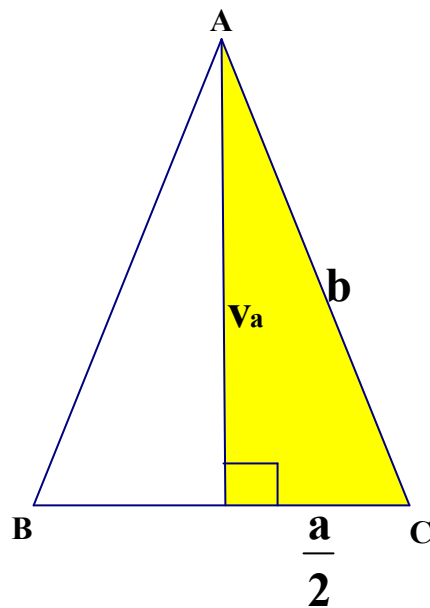
$$d = \sqrt{4225}$$

$$b = \frac{112}{2} \text{ mm}$$

$$d = 65 \text{ mm}$$

$$b = 56 \text{ mm}$$

Primjena Pitagorina poučka na jednakokračan trokut



$$O = a + 2b$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} \quad \text{ili} \quad P = \frac{b \cdot v_b}{2}$$

Primjena Pitagorinog poučka na jednakokračan trokut:

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

Primjer:

Izračunaj opseg jednakokračnog trokuta čija osnovica ima 42dm, a visina na tu osnovicu iznosi 28dm.

$$a = 42\text{dm}$$

$$v_a = 28\text{dm}$$

$$O = ?$$

$$O = a + 2b$$

$$b^2 = v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$O = (42 + 2 \cdot 35)\text{dm}$$

$$b^2 = 28^2 + \left(\frac{42}{2}\right)^2$$

$$O = (42 + 70)\text{dm}$$

$$b^2 = 784 + 21^2$$

$$O = 112\text{dm}$$

$$b^2 = 784 + 441$$

$$b^2 = 1225 / \sqrt{\quad}$$

$$b = \sqrt{1225}$$

$$b = 35 \text{ dm}$$

Primjer:

Izračunaj površinu jednakokravnog trokuta kojem je duljina osnovice 54mm, a duljina kraka 47mm.

$$a = 54\text{mm}$$

$$b = 47\text{mm}$$

$$P = ?$$

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{a \cdot v}{2}$$

$$v_a^2 = 47^2 - \left(\frac{54}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{54 \cdot 2\sqrt{370}}{2} \text{mm}^2$$

$$v_a^2 = 2209 - 27^2$$

$$P = \frac{108\sqrt{370}}{2} \text{mm}^2$$

$$v_a^2 = 2209 - 729$$

$$P = 54\sqrt{370} \text{mm}^2$$

$$v_a^2 = 1480$$

$$v_a = \sqrt{1480}$$

$$v_a = \sqrt{4 \cdot 370}$$

$$v_a = 2\sqrt{370} \text{ mm}$$

Zadatak 3.

Duljina osnovice jednakokravnog trokuta je 40cm, a opseg trokuta iznosi 98cm. Kolika je površina tog trokuta?

$$a = 40\text{cm}$$

$$O = 98\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$O = a + 2b$$

$$98 = 40 + 2b$$

$$40 + 2b = 98$$

$$2b = 98 - 40$$

$$v_a^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$$

$$2b = 58$$

$$v_a^2 = 29^2 - \left(\frac{40}{2}\right)^2$$

$$P = \frac{40 \cdot 21}{2} \text{cm}^2$$

$$b = \frac{58}{2} \text{cm}$$

$$v_a^2 = 841 - 20^2$$

$$P = 20 \cdot 21 \text{cm}^2$$

$$b = 29\text{cm}$$

$$v_a^2 = 841 - 400$$

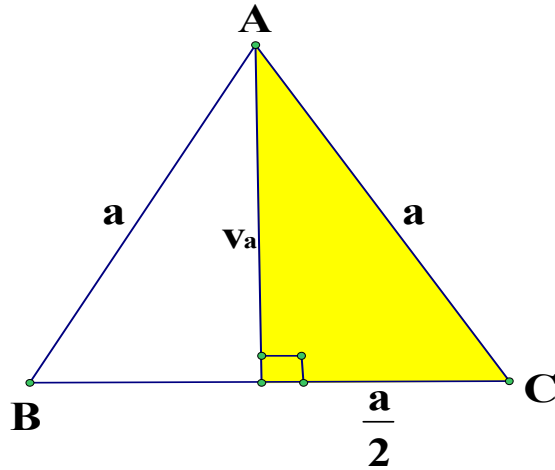
$$P = 420 \text{cm}^2$$

$$v_a = \sqrt{441}$$

$$v_a = 21\text{cm}$$

Primjena Pitagorina poučka na jednakostraničan trokut

$$O = 3 \cdot a$$



Primjenom Pitagorina poučka vrijedi:

$$v^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = a^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$v^2 = \frac{4a^2 - a^2}{4}$$

$$v^2 = \frac{3a^2}{4} / \sqrt{\quad}$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{1}{2} a \cdot v$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Primjer:

Duljina stranice jednakostraničnog trokuta jest 6cm. Izračunaj duljinu visine tog trokuta.

$$a = 6\text{cm}$$

$$v = ?$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$v = \frac{6\sqrt{3}}{2}$$

$$v = 3\sqrt{3}\text{cm}$$

Visina tog trokuta je $3\sqrt{3}\text{cm}$.

Primjer:

Izračunaj površinu jednakostraničnog trokuta čija visina ima duljinu 6cm.

$$v = 6\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$P = \frac{(4\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{cm}^2$$

$$6 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 2$$

$$P = \frac{16 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} \text{cm}^2$$

$$12 = a\sqrt{3}$$

$$P = 12\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$a = \frac{12}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$a = \frac{12\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

$$a = \frac{12\sqrt{3}}{3}$$

$$a = 4\sqrt{3}\text{cm}$$

Primjer:

Izračunaj površinu pravilnog šesterokuta sa stranicom duljine 5cm.

$$a = 5\text{cm}$$

$$P = ?$$

$$P_6 = 6 \cdot P_{\Delta}$$

$$P_6 = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_6 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$P_6 = \frac{3 \cdot 5^2 \sqrt{3}}{2} \text{cm}^2$$

$$P = \frac{75\sqrt{3}}{2} \text{cm}^2$$

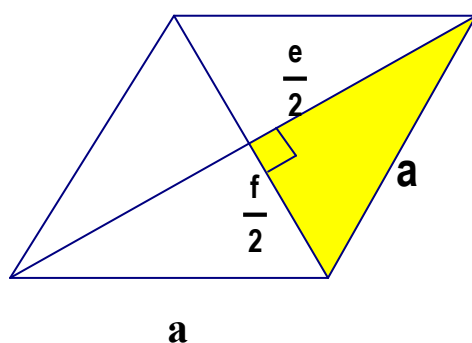
$$P_6 = 37.5\sqrt{3}\text{cm}^2$$

Primjena Pitagorina poučka na romb

Svojstva romba:

- dijagonale romba su okomite
- dijagonale romba se raspolavljaju
- dijagonale romba dijele romb na četiri sukladna pravokutna trokuta

$$P = \frac{e \cdot f}{2} \quad \text{ili} \quad P = a \cdot v \quad O = 4 \cdot a$$



$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{e}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{f}{2}\right)^2 = a^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2$$

Primjer :

Duljine dijagonala romba su 18cm i 24cm. Izračunaj opseg i površinu romba.

$$e = 18\text{cm}$$

$$f = 24\text{cm}$$

$$O, P = ?$$

$$O = 4a$$

$$P = \frac{e \cdot f}{2}$$

$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$O = 4 \cdot 15\text{cm}$$

$$P = \frac{18 \cdot 24}{2} \text{cm}^2$$

$$a^2 = \left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{24}{2}\right)^2$$

$$O = 60\text{cm}$$

$$P = 216\text{cm}^2$$

$$a^2 = 9^2 + 12^2$$

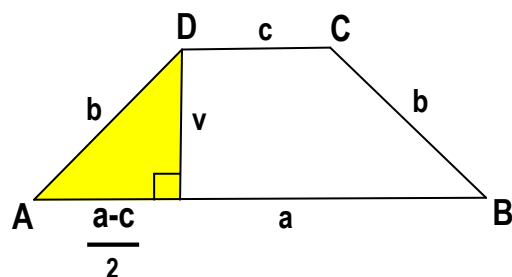
$$a^2 = 81 + 144$$

$$a^2 = 225$$

$$a = \sqrt{225}$$

$$a = 15\text{cm}$$

Primjena Pitagorina poučka na jednakokračan trapez



$$P = \frac{(a+c) \cdot v}{2} \quad O = a + 2b + c$$

Primjenom Pitagorina poučka na trapez vrijedi:

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

$$b^2 = \left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + v^2$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a-c}{2}\right)^2$$

Primjer :

Duljina je kraće osnovice jednakokračnog trapeza 11 cm, duljina kraka 25 cm, a duljina visine 24 cm. Kolika je površina i opseg trapeza?

$$c = 11 \text{ cm}$$

$$b = 25 \text{ cm}$$

$$v = 24 \text{ cm}$$

$$P, O = ?$$

$$P = \frac{(a+c) \cdot v}{2}$$

$$O = a + 2b + c$$

$$\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

$$P = \frac{(25+11) \cdot 24}{2} \text{ cm}^2$$

$$O = (25 + 2 \cdot 25 + 11) \text{ cm}$$

$$\left(\frac{a-11}{2}\right)^2 = 25^2 - 24^2$$

$$P = \frac{36 \cdot 24}{2} \text{ cm}^2$$

$$O = (25 + 50 + 11) \text{ cm}$$

$$\left(\frac{a-11}{2}\right)^2 = 49 / \sqrt{\quad}$$

$$P = 432 \text{ cm}^2$$

$$O = 86 \text{ cm}$$

$$\frac{a-11}{2} = \sqrt{49}$$

$$\frac{a-11}{2} = 7 / \cdot 2$$

$$a - 11 = 14$$

$$a = 25 \text{ cm}$$

GEOMETRIJSKA TIJELA

PRIZME I PIRAMIDE - UGLATA GEOMETRIJSKA TIJELA

VALJAK, STOŽAC, KUGLA - OBLA GEOMETRIJSKA TIJELA

PRIZME

Prizme su geometrijska tijela omeđena s dva sukladna i usporedna mnogokuta (n-terokuta) i n paralelograma . Likovi koji omeđuju prizmu su njene **strane** .

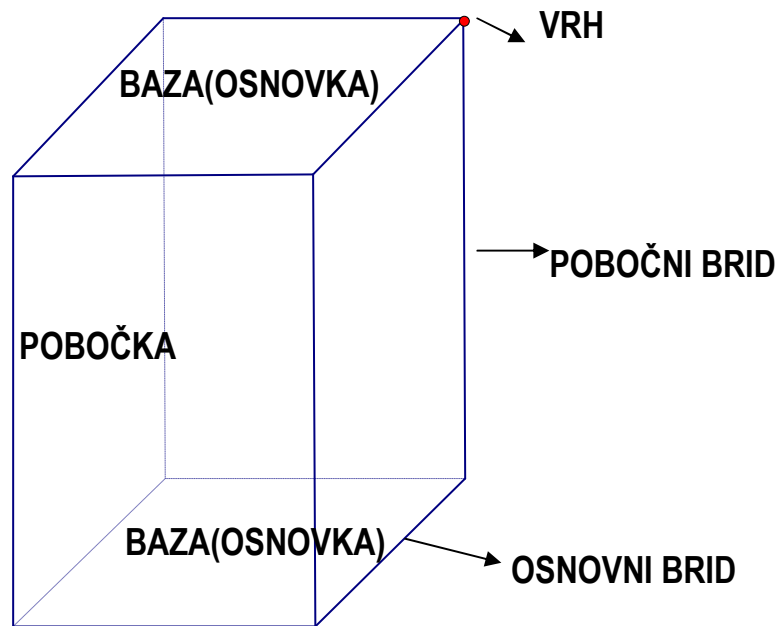
Sukladni i usporedni mnogokuti su **baze** , **osnovke** prizme .

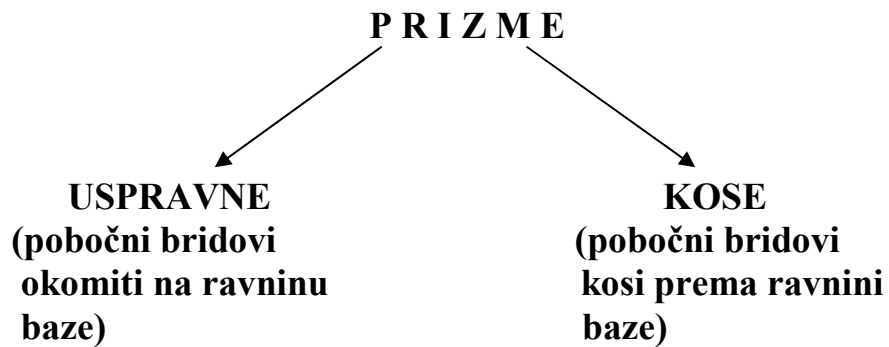
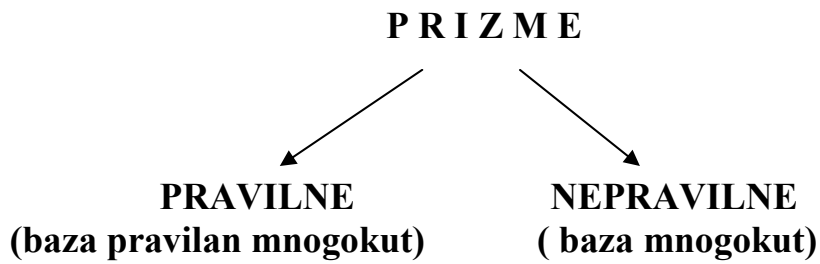
Paralelogrami koji omeđuju prizmu su **pobočke** (**pobočne strane**) prizme .

Sve stranice baza i pobočki su **bridovi** prizme .

Osnovni bridovi su bridovi baze (osnovke) a **pobočni bridovi** su bridovi u kojima se dodiruju po dvije pobočne strane .

Vrhovi prizme su točke u kojima se dodiruju bridovi prizme .





Oplošje (površina) geometrijskog tijela je zbroj površina svih strana koje to tijelo omeđuju. Površinu baze označavamo B , a površinu pobočja P .

Oplošje prizme je

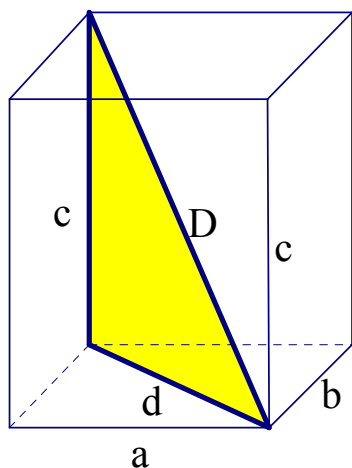
$$O=2B+P$$

Obujam (volumen) prizme kojoj je B površina baze i h duljina

$$V=B \cdot h$$

KVADAR

Je uspravna prizma kojoj su baze i pobočne strane pravokutnici. Nasuprotne strane kvadra međusobno su paralelni i sukladni pravokutnici .



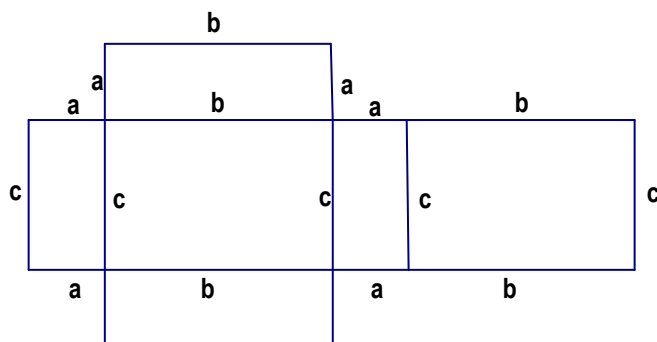
a, b - bridovi baze
c - visina
d - dijagonala baze
D - prostorna dijagonala

$$d^2 = a^2 + b^2$$

$$D^2 = d^2 + c^2$$

$$\mathbf{D^2 = a^2 + b^2 + c^2}$$

MREŽA



$$\mathbf{O=2(ab+ac+bc)}$$

$$\mathbf{O=2ab+2ac+2bc}$$

$$\mathbf{V=a \cdot b \cdot c}$$

$$\mathbf{V=B \cdot h}$$

Primjer:

Koliko mlijeka stane u kartonsku ambalažu oblika kvadra čije dno ima dimenzije 9cm i 6cm , a visina je 19.5 cm .Koliko je kartona potrebno za izradu te ambalaže?

$a=9\text{cm}$	$V=abc$	$1\text{ dm}^3=1\text{ l}$
$b=6\text{cm}$	$V=9\cdot 6\cdot 19.5\text{ cm}^3$	
$c=19.5\text{cm}$	$V=1053\text{ cm}^3$	
$V=?$	$V=1.053\text{ dm}^3$	
	$V=1.053\text{ l}$	

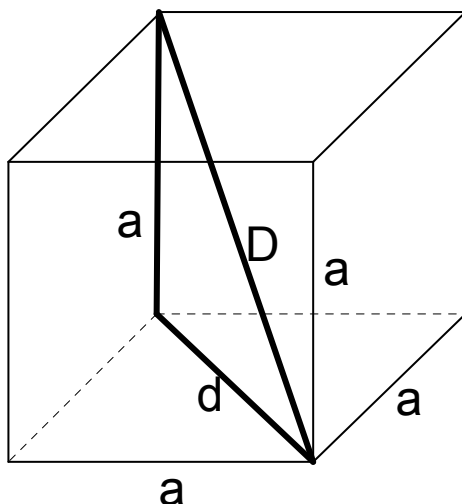
$$O=2(ab+ac+bc)$$
$$O=2(9\cdot 6+9\cdot 19.5+6\cdot 19.5)\text{ cm}^2$$
$$O=2(54+175.5+117)\text{ cm}^2$$
$$O=2\cdot 346.5\text{ cm}^2$$
$$O=693\text{ cm}^2$$

Odgovor :

U navedenu kartonsku ambalažu stane 1.053 litre mlijeka . Za izradu navedene kartonske ambalaže potrebno je 693 cm^2 kartona

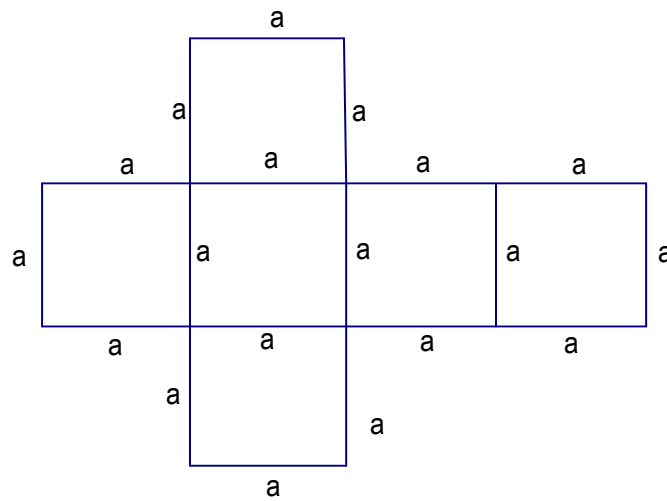
KOCKA

Kocka je kvadar kojemu su svi bridovi jednake duljine .
Kocka je omeđena sa šest sukladnih kvadrata .



a - brid
d- plošna dijagonala (dijagonala kvadrata)
D- prostorna dijagonala

MREŽA



OPLOŠJE KOCKE

$$O=6 \cdot a^2$$

OBUJAM KOCKE

$$V=a^3$$

PLOŠNA DIJAGONALA KOCKE

$$d=a\sqrt{2}$$

PROSTORNA DIJAGONALA KOCKE

$$D^2=d^2+a^2$$

$$D^2=(a\sqrt{2})^2+a^2$$

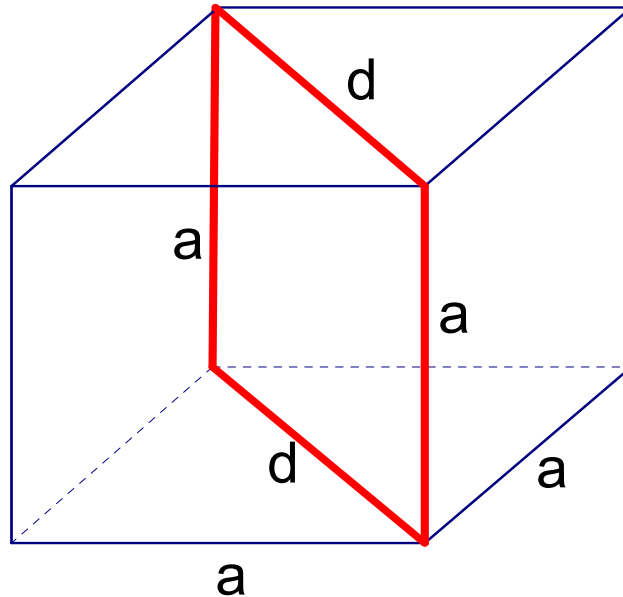
$$D^2=2a^2+a^2$$

$$D^2=3a^2$$

$$D=\sqrt{3a^2}$$

$$D=a\sqrt{3}$$

POVRŠINA DIJAGONALNOG PRESJEK



$$P_{dp} = d \cdot a$$

$$P_{dp} = a\sqrt{2} \cdot a$$

$$P_{dp} = a^2\sqrt{2}$$

Primjer:

Koliko se kartonskih kutija oblika kocke brida 2 m može napraviti od 1000 m^2 kartona , ako se zna da prilikom izrade propadne 16% kartona ?

Može li se u tu kutiju smjestiti metalna šipka duljine 3.7m?

Koliki je obujam te kutije ?

$$a=2\text{m}$$

$$O=6a^2$$

$$1000 \text{ m}^2 - 16\% \cdot 1000 \text{ m}^2 =$$

$$D=a\sqrt{3}$$

$$P=1000 \text{ m}^2$$

$$O=6 \cdot 2^2 \text{ m}^2$$

$$=1000 \text{ m}^2 - 0.16 \cdot 1000 \text{ m}^2 =$$

$$D=2\sqrt{3} \text{ m}$$

$$p=16\%$$

$$O=6 \cdot 4 \text{ m}^2$$

$$=1000 \text{ m}^2 - 160 \text{ m}^2 =$$

$$D=2 \cdot 1.73 \text{ m}$$

$$l=3.7 \text{ m}$$

$$O=24 \text{ m}^2$$

$$=840 \text{ m}^2$$

$$D=3.46 \text{ m}$$

$n=?$ (broj kutija)

$D=?$

$$n = \frac{840 \text{ m}^2}{24 \text{ m}^2}$$

$$V=a^3$$

$V=?$

$n=35$ kutija s poklopcem

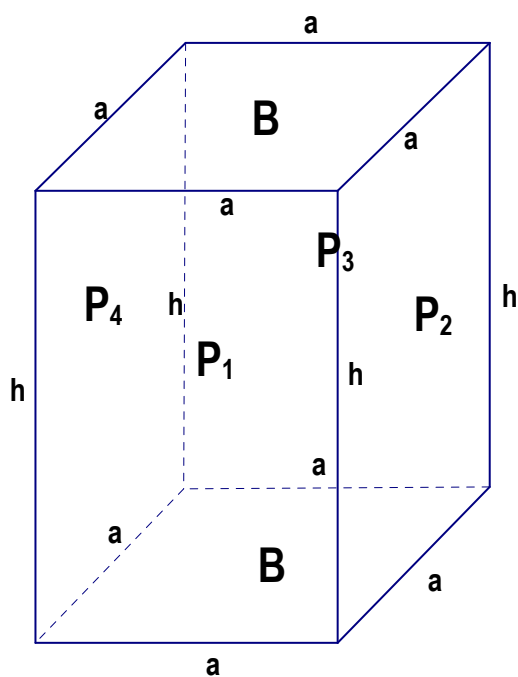
$$V=2^3 \text{ m}^3$$

$$V=8 \text{ m}^3$$

O: Može se napraviti 35 kutija s poklopcem .

Štap duljine 3.7m ne može stati u kutiju ni po duljini , ni po širini , ni visini ,a ni po dijagonali jer su sve mjere manje od 3.7m . Obujam kutije je 8 m^3 .

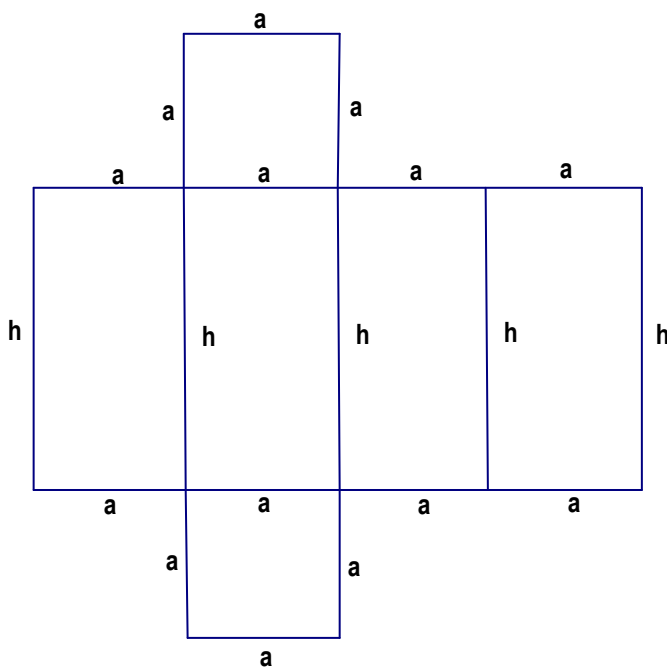
PRAVILNA USPRAVNA ČETVEROSTRANA PRIZMA



a – osnovni brid
 h – visina prizme
 B – površina baze

P – površina pobočja $\Rightarrow \begin{aligned} P_1 &= P_2 = P_3 = P_4 \\ P &= P_1 + P_2 + P_3 + P_4 \end{aligned}$

MREŽA



$$B = a^2 \quad P = 4ah$$

$$O = 2B + P$$

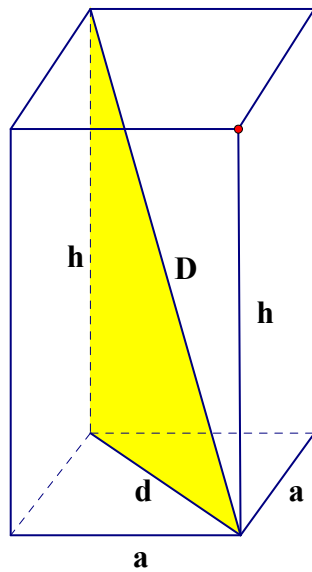
$$O = 2a^2 + 4ah$$

$$O = 2a(a + 2h)$$

$$V = B \cdot h$$

$$V = a^2 \cdot h$$

PROSTORNA DIJAGONALA (D)



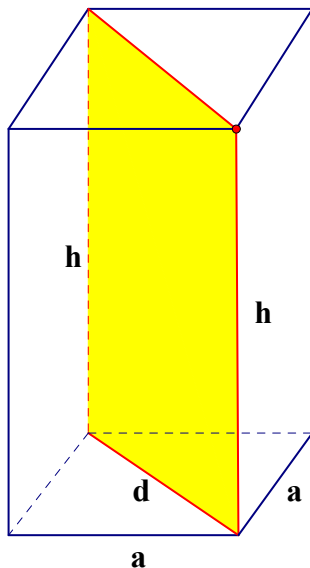
$$D^2 = d^2 + h^2$$

$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + h^2$$

$$D^2 = 2a^2 + h^2$$

$$D = \sqrt{2a^2 + h^2}$$

POVRŠINA DIJAGONALNOG PRESJEKA



$$P_{dp} = d \cdot h$$

$$P_{dp} = a\sqrt{2} \cdot h$$

$$P_{dp} = a \cdot h\sqrt{2}$$

Primjer :

Površina baze pravilne četverostrane prizme je 144 cm^2 , a duljina visine je 15 cm . Izračunaj oplošje, obujam, duljinu prostorne dijagonale i površinu dijagonalnog presjeka.

$$B = 144 \text{ cm}^2$$

$$h = 15 \text{ cm}$$

$$O, V, D, P_{dp} = ?$$

$$B = a^2$$

$$O = 2B + P$$

$$V = B \cdot h$$

$$a^2 = 144$$

$$O = 2 \cdot B + 4ah$$

$$V = 144 \cdot 15 \text{ cm}^3$$

$$a = \sqrt{144} \text{ cm}$$

$$O = (2 \cdot 144 + 4 \cdot 12 \cdot 15) \text{ cm}^2$$

$$V = 2160 \text{ cm}^3$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$O = (288 + 720) \text{ cm}^2$$

$$O = 1008 \text{ cm}^2$$

$$D^2 = d^2 + h^2$$

$$P_{dp} = d \cdot h$$

$$D^2 = (a\sqrt{2})^2 + h^2$$

$$P_{dp} = 12\sqrt{2} \cdot 15 \text{ cm}^2$$

$$D^2 = (12\sqrt{2})^2 + 15^2$$

$$P_{dp} = 180\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

$$D^2 = 144 \cdot 2 + 225$$

$$P_{dp} = 180 \cdot 1.41 \text{ cm}^2$$

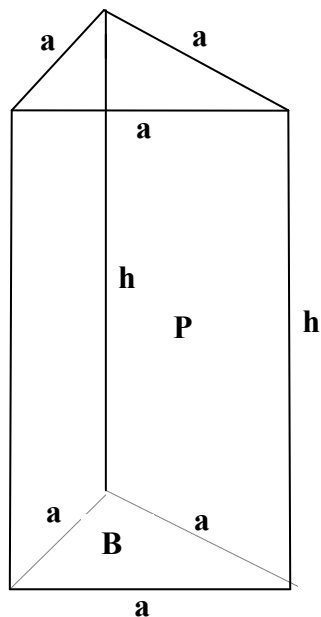
$$D^2 = 513$$

$$P_{dp} = 253.8 \text{ cm}^2$$

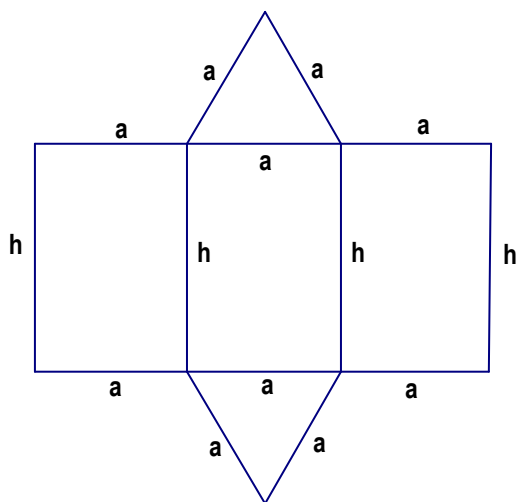
$$D = \sqrt{513} \text{ cm}$$

$$D = 22.65 \text{ cm}$$

PRAVILNA USPRAVNA TROSTRANA PRIZMA



MREŽA



$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad P = 3ah$$

$$O = 2B + P$$

$$O = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3ah$$

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + 3ah$$

$$V = B \cdot h$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot h$$

Primjer:

Izračunaj oplošje i obujam pravilne trostrane prizme ako je površina baze 62.28 cm^2 i duljina visine 15 cm .

$$B = 62.28 \text{ cm}^2$$

$$h = 15 \text{ cm}$$

$$O, V = ?$$

$$B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

$$62.28 = \frac{a^2 \cdot 1.73}{4} / \cdot 4$$

$$249.12 = a^2 \cdot 1.73$$

$$a^2 = \frac{249.12}{1.73}$$

$$a^2 = 144$$

$$a = \sqrt{144} \text{ cm}$$

$$a = 12 \text{ cm}$$

$$O = 2B + P$$

$$O = 2 \cdot B + 3ah$$

$$O = (2 \cdot 62.28 + 3 \cdot 12 \cdot 15) \text{ cm}^2$$

$$O = (124.56 + 540) \text{ cm}^2$$

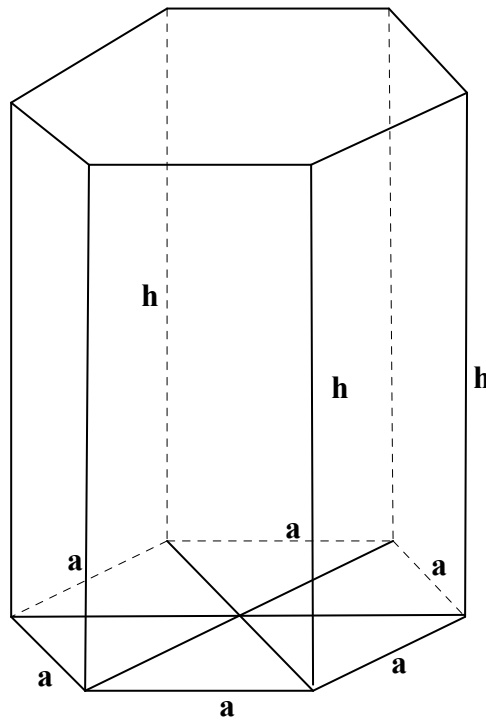
$$O = 664.56 \text{ cm}^2$$

$$V = B \cdot h$$

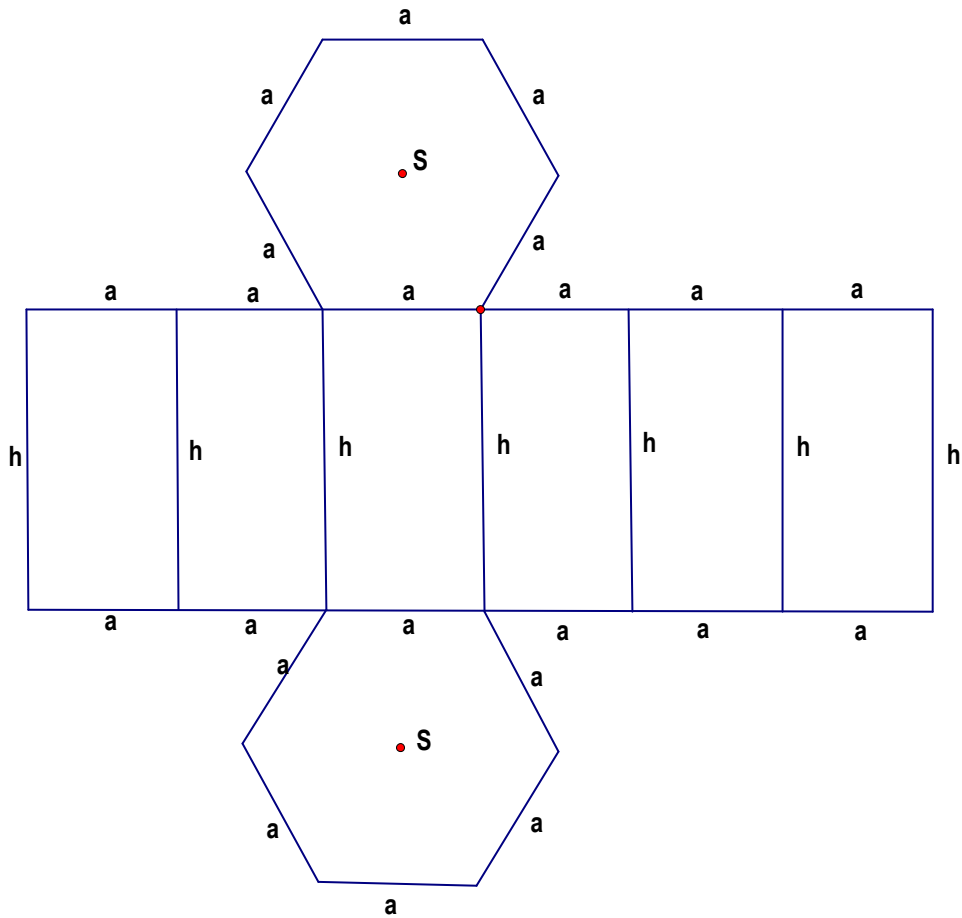
$$V = 62.28 \cdot 15 \text{ cm}^3$$

$$V = 934.2 \text{ cm}^3$$

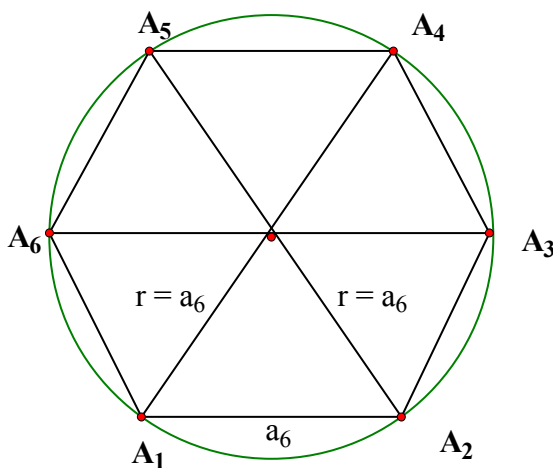
PRAVILNA USPRAVNA ŠESTEROSTRANA PRIZMA



MREŽA



Baza je pravilan šesterokut -



$$a_6 = r$$

$$P_6 = 6 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$P_6 = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \quad P = 6ah$$

$$O = 2B + P$$

$$O = 2 \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 6ah$$

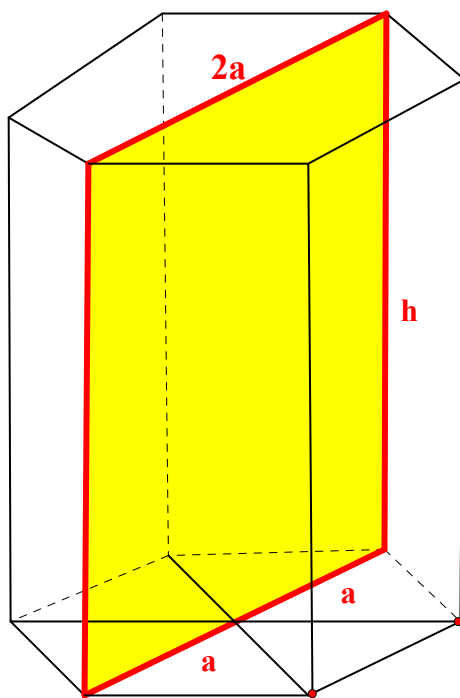
$$O = 3a^2\sqrt{3} + 6ah$$

$$V = B \cdot h$$

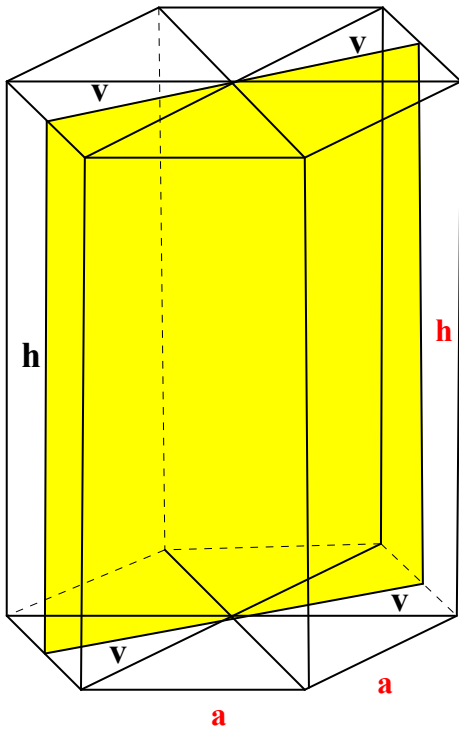
$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$V = \frac{3a^2 \cdot h\sqrt{3}}{2}$$

POVRŠINA VEĆEG I MANJEG PRESJEKA



$$d=2a \quad P_{vp} = 2ah \quad (\text{površina dijagonalnog presjeka – veći presjek})$$



$$2v = \cancel{2}^1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\cancel{2}_1}$$

$$2v = a\sqrt{3}$$

$$P_{MP} = 2vh$$

$$P_{MP} = a\sqrt{3} \cdot h$$

$$P_{MP} = ah\sqrt{3}$$

(Površina manjeg presjeka)

Primjer:

Oplošje pravilne šesterostrane prizme je 1419 cm^2 , a duljina osnovnog brida $a=10\text{cm}$.

Izračunaj njezin obujam.

$$O=1419 \text{ cm}^2$$

$$a=10\text{cm}$$

$$V=?$$

$$O = 2B + P$$

$$V = B \cdot h$$

$$O = 3a^2\sqrt{3} + 6ah$$

$$V = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$1419 = 3 \cdot 10^2 \cdot 1.73 + 6 \cdot 10 \cdot h$$

$$V = \frac{3 \cdot 10^2 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 15\text{cm}^3$$

$$1419 = 3 \cdot 100 \cdot 1.73 + 60h$$

$$V = \frac{3 \cdot 100 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 15\text{cm}^3$$

$$1419 = 519 + 60h$$

$$V = \frac{300\sqrt{3}}{2} \cdot 15\text{cm}^3$$

$$60h = 1419 - 519$$

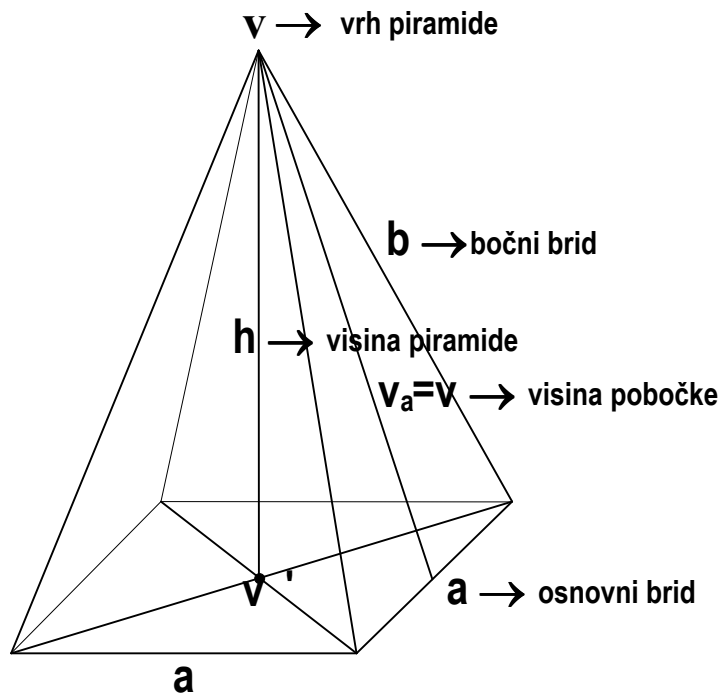
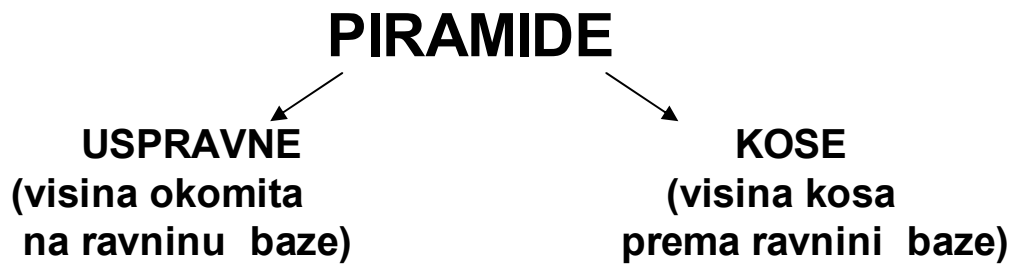
$$V = 150\sqrt{3} \cdot 15\text{cm}^3$$

$$60h = 900$$

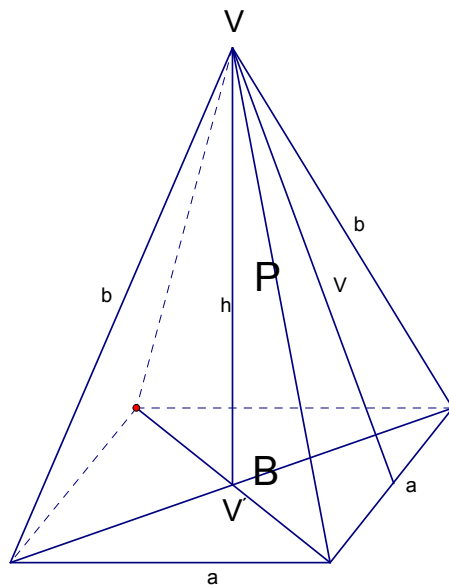
$$V = 2250\sqrt{3}\text{cm}^3$$

$$h = 15\text{cm}$$

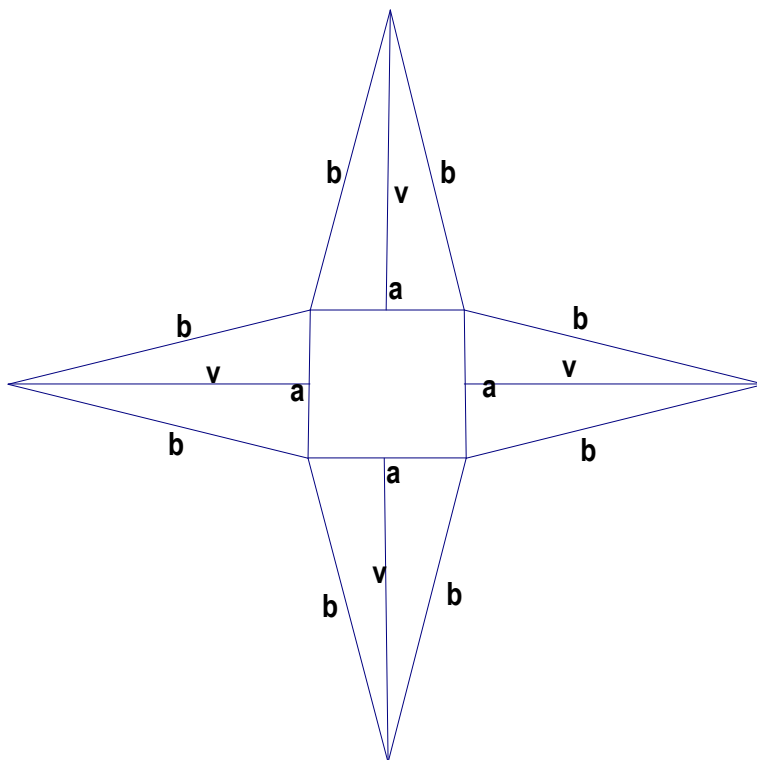
$$V = 3892.5\text{cm}^3$$



PRAVILNA USPRAVNA ČETVEROSTRANA PIRAMIDA



MREŽA



Oplošje piramide jest površina koja se dobije zbrajanjem površine baze B i površine pobočja P .

$$B = a^2$$
$$P = 4 \cdot \frac{a \cdot v}{2}$$
$$P = 2av$$

O = oplošje
V = volumen

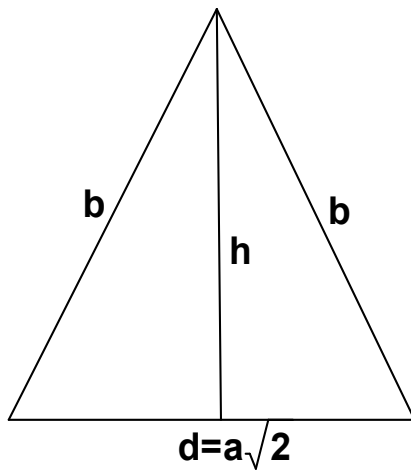
$$O = B + P$$

$$O = a^2 + 2av$$

$$V = \frac{B \cdot h}{3}$$

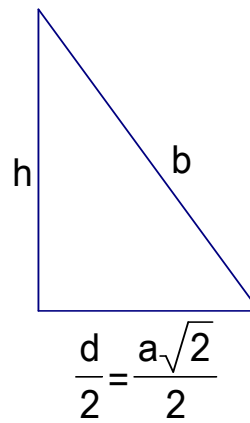
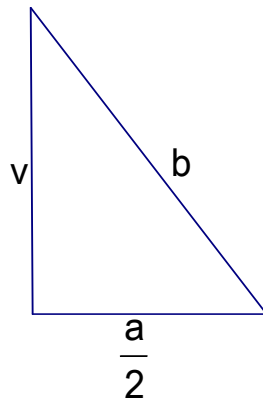
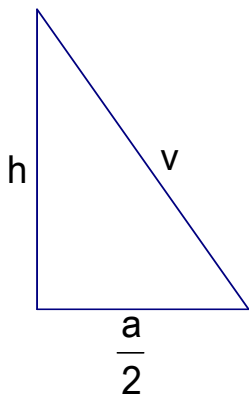
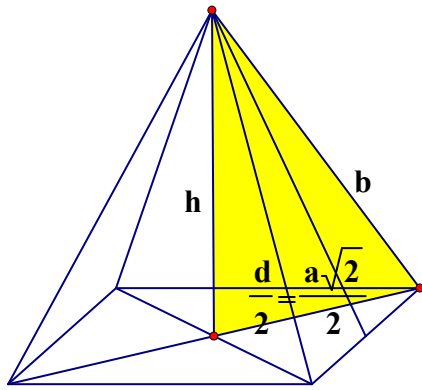
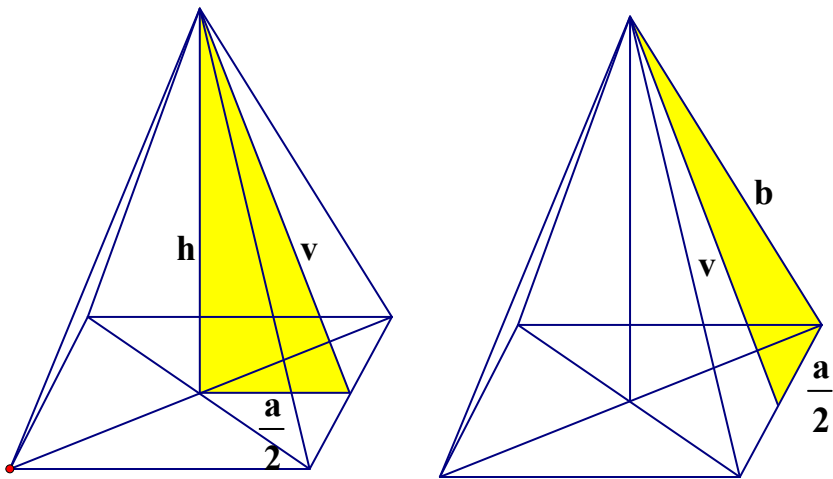
$$V = \frac{a^2 \cdot h}{3} \quad \text{ili} \quad V = \frac{1}{3} a^2 h$$

POVRŠINA DIJAGONALNOG PRESJEKA



$$P_{dp} = \frac{a\sqrt{2} \cdot h}{2}$$

Karakteristični pravokutni trokuti



$$v^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = v^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = v^2 - h^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 - h^2$$

Primjer:

Izračunaj oplošje i obujam pravilne uspravne četverostrane piramide

ako je $B = 196\text{cm}^2$ i $h = 24\text{cm}$.

$$B = 196\text{cm}^2$$

$$h = 24\text{cm}$$

$$B = a^2$$

$$v^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$O = ?$$

$$196 = a^2$$

$$v^2 = 24^2 + \left(\frac{14}{2}\right)^2$$

$$V = ?$$

$$a = \sqrt{196} \text{ cm}$$

$$v^2 = 576 + 49$$

$$a = 14\text{cm}$$

$$v^2 = 625 / \sqrt{\quad}$$

$$v = \sqrt{625} \text{ cm}$$

$$v = 25\text{cm}$$

$$O = B + P$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$O = B + 2av$$

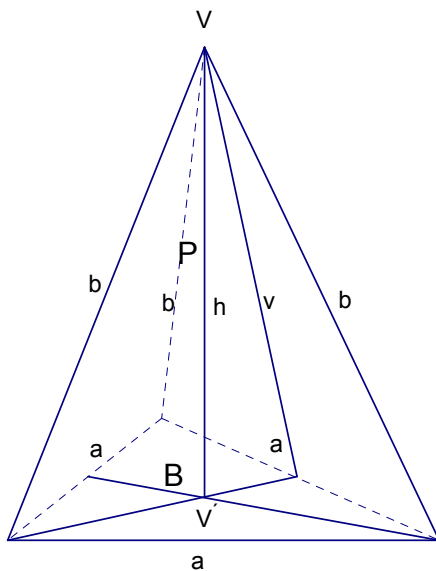
$$V = \frac{196 \cdot 24}{3} \text{ cm}^3$$

$$O = (196 + 2 \cdot 14 \cdot 25) \text{ cm}^2$$

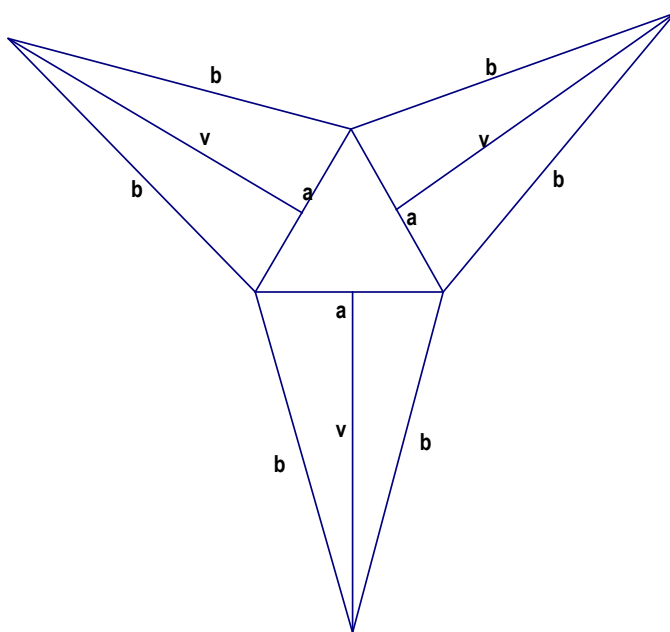
$$V = 1568 \text{ cm}^3$$

$$O = 896 \text{ cm}^2$$

PRAVILNA TROSTRANA PIRAMIDA



MREŽA



$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$O = B + P$$

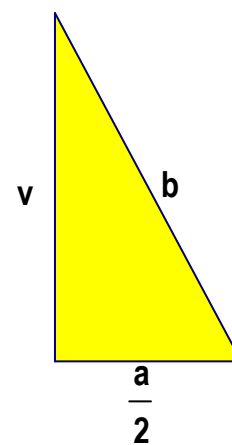
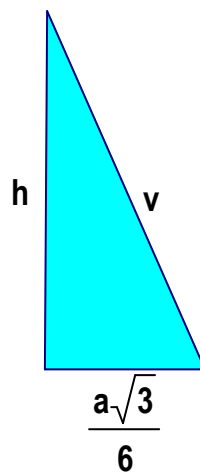
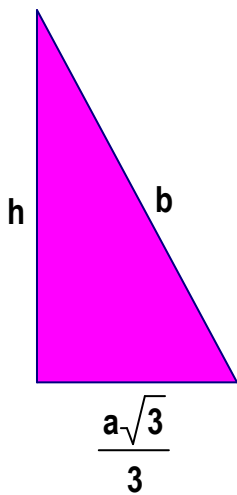
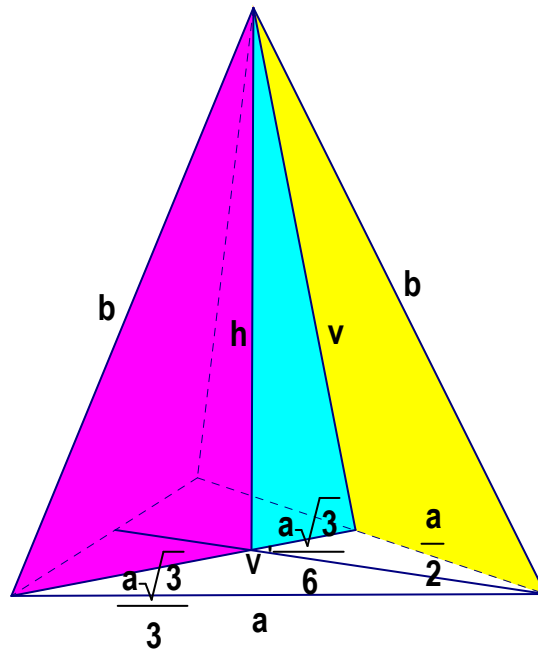
$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$P = \frac{3av}{2}$$

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av}{2}$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12} \cdot h$$

Karakteristični pravokutni trokuti



$$b^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$h^2 = b^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = b^2 - h^2$$

$$v^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$h^2 = v^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = v^2 - h^2$$

$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

PRIMJER:

Izračunaj oplošje i obujam pravilne trostrane piramide ako je duljina visine 12cm i duljina visine bočne strane je 15cm.

$$h=12\text{cm}$$

$$v=15\text{cm}$$

$$O, V=?$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = v^2 - h^2$$

$$O = B + P$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 15^2 - 12^2$$

$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av}{2}$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = 81$$

$$O = \left(\frac{(18\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + \frac{3 \cdot 18\sqrt{3} \cdot 15}{2}\right) \text{cm}^2$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{6} = 9$$

$$O = (243\sqrt{3} + 405\sqrt{3}) \text{cm}^2$$

$$a\sqrt{3} = 54$$

$$O = 648\sqrt{3} \text{cm}^2$$

$$a = \frac{54}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

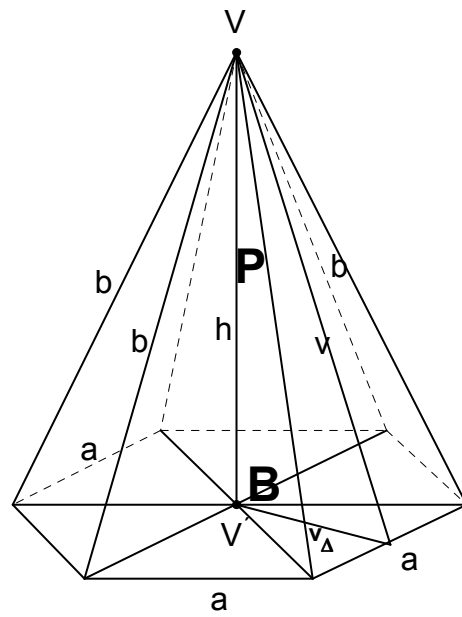
$$a = \frac{54\sqrt{3}}{3}$$

$$V = \left(\frac{1}{3} 243\sqrt{3} \cdot 12\right) \text{cm}^3$$

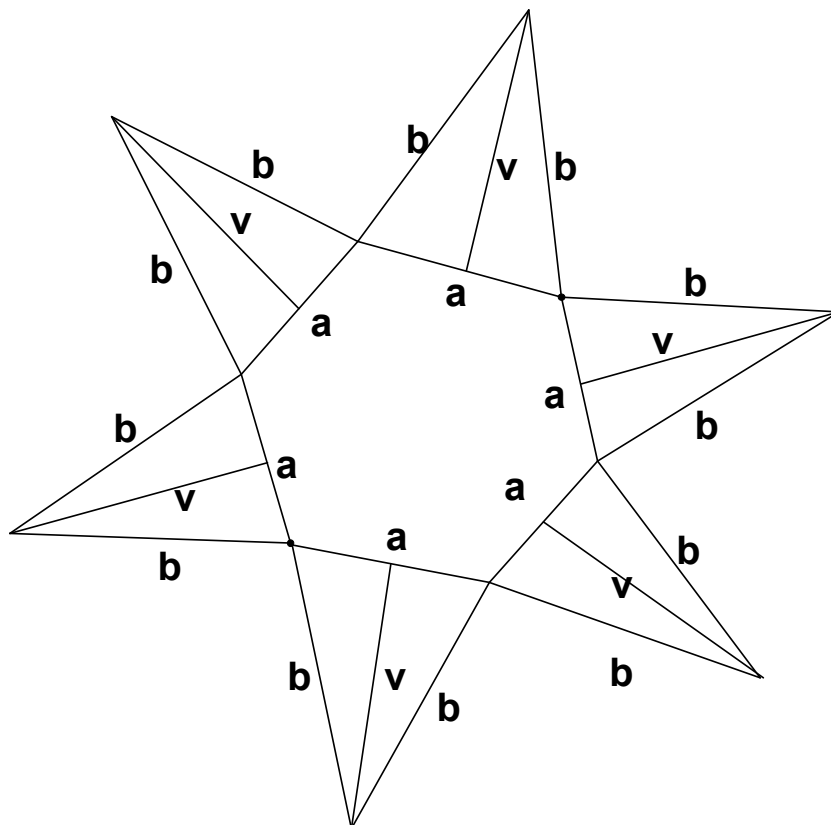
$$a = 18\sqrt{3} \text{cm}$$

$$V = 972\sqrt{3} \text{cm}^3$$

PRAVILNA ŠESTEROSTRANA PIRAMIDA



MREŽA



OPLOŠJE I OBUJAM

$$B = 6 \cdot P_{\Delta}$$

$$P = \cancel{\beta}^3 \cdot \frac{av}{\cancel{z}_1}$$

$$B = \cancel{\beta}^3 \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{\cancel{A}_2}$$

$$P = 3av$$

$$B = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2}$$

$$O = B + P$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$$

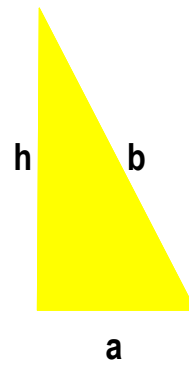
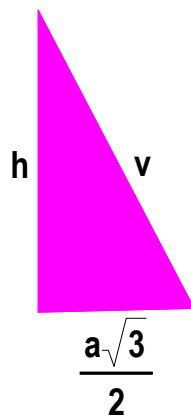
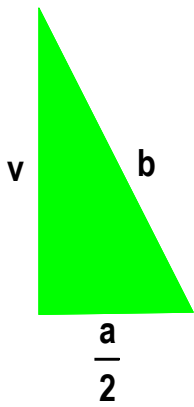
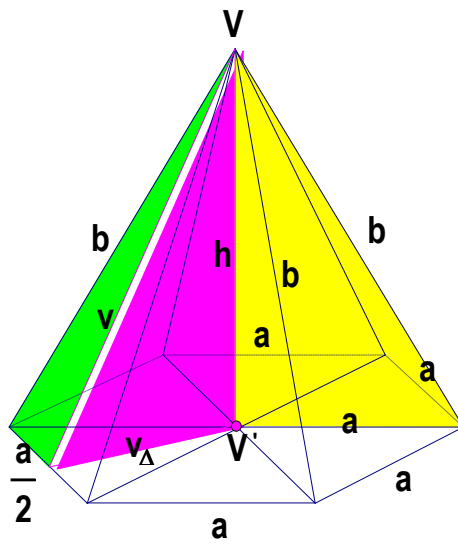
$$O = \frac{3a^2 \sqrt{3}}{2} + 3av$$

$$V = \frac{1}{\cancel{\beta}_1} \cdot \frac{\cancel{\beta}^1 a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2 \cdot h \sqrt{3}}{2}$$

KARAKTERISTIČNI PRAVOKUTNI TROKUTI



$$b^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$v^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = b^2 - v^2$$

$$v^2 = h^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$h^2 = v^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

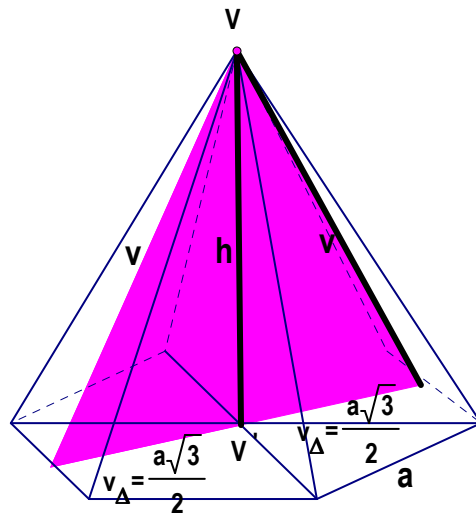
$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = v^2 - h^2$$

$$b^2 = h^2 + a^2$$

$$a^2 = b^2 - h^2$$

$$h^2 = b^2 - a^2$$

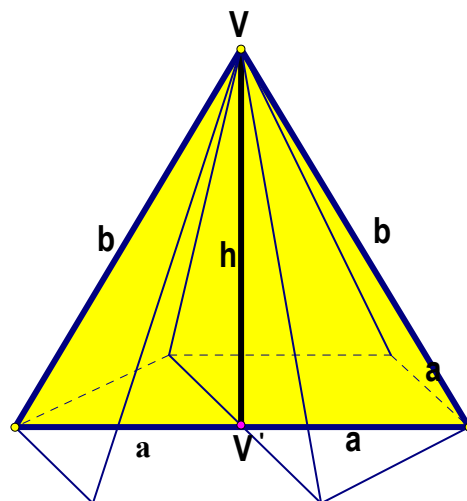
POVRŠINA VEĆEG OSNOG PRESJEKA



$$P_{vp} = \cancel{\mathcal{Z}}^1 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\cancel{\mathcal{Z}}_1} \cdot h$$

$$P_{vp} = a\sqrt{3} \cdot h$$

POVRŠINA MANJEG OSNOG PRESJEKA



$$P_{MP} = \frac{\cancel{\mathcal{Z}}^1 a \cdot h}{\cancel{\mathcal{Z}}_1}$$

$$P_{MP} = a \cdot h$$

Primjer:

Izračunaj oplošje i obujam pravilne šesterostrane piramide ako je duljina visine bočne plohe $v=20\text{cm}$ i duljina visine piramide $h=16\text{cm}$.

$$v=20\text{cm}$$

$$h=16\text{cm}$$

$$O=?$$

$$V=?$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = v^2 - h^2$$

$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$$

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 20^2 - 16^2$$

$$P = 3av$$

$$V = \left(\frac{1}{3} \cdot 288\sqrt{3} \cdot 16\right) \text{cm}^3$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 400 - 256$$

$$O = B + P$$

$$V = 1536\sqrt{3}\text{cm}^3$$

$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 144/\sqrt{\quad}$$

$$O = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3av$$

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 12/\cdot 2$$

$$O = \left(\frac{3 \cdot (8\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3}}{2} + 3 \cdot 8\sqrt{3} \cdot 20\right) \text{cm}^2$$

$$a\sqrt{3} = 24$$

$$O = \left(\frac{3 \cdot \cancel{64}^{32} \cdot 3\sqrt{3}}{\cancel{2}_1} + 480\sqrt{3}\right) \text{cm}^2$$

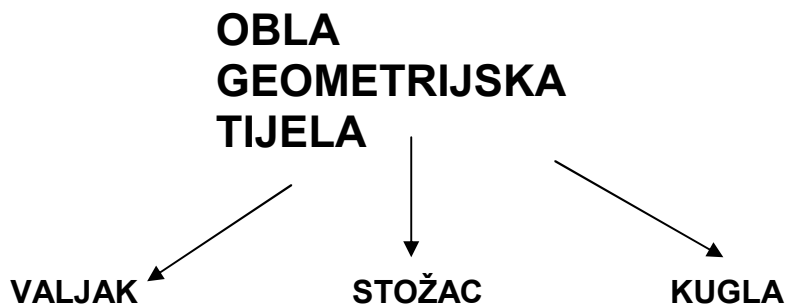
$$a = \frac{24}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$$O = (288\sqrt{3} + 480\sqrt{3}) \text{cm}^2$$

$$a = \frac{24\sqrt{3}}{3}$$

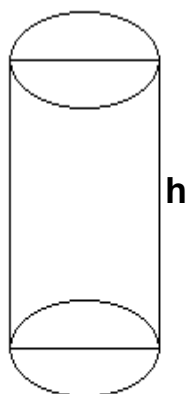
$$O = 768\sqrt{3}\text{cm}^2$$

$$a = 8\sqrt{3}$$



VALJAK

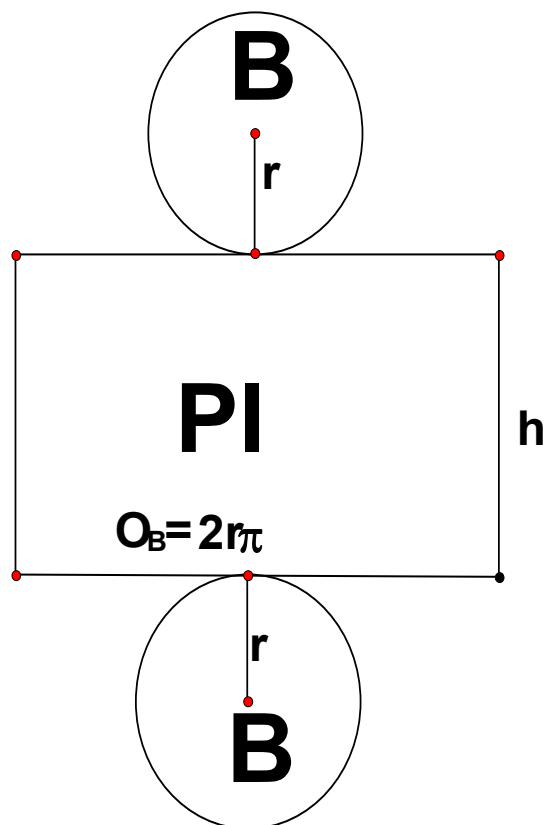
Valjak je geometrijsko tijelo koje nastaje rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice .
 Omeđen je dvjema osnovkama(bazama), koje su krugovi i plaštom koji je zakrivljena ploha.
 Plašt razvijen u ravnini je pravokutnik sa stranicama h i $2r\pi$.



h - visina valjka

r - polumjer baze valjka

MREŽA VALJKA



B – površina baze

$$B = r^2 \pi$$

PI – površina plašta

$$PI = 2r\pi \cdot h$$

$$O = 2B + PI$$

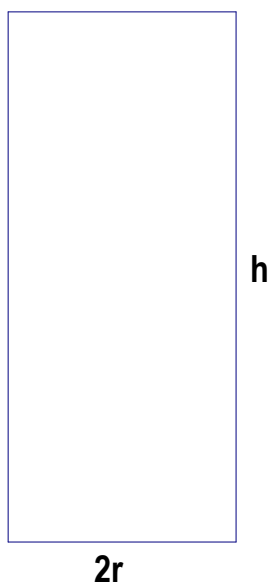
$$O = 2r^2\pi + 2r\pi \cdot h$$

$$O = 2r\pi(r + h)$$

$$V = B \cdot h$$

$$V = r^2\pi \cdot h$$

POVRŠINA I OPSEG OSNOG PRESJEKA VALJKA



$$P_{op} = 2r \cdot h$$

$$O_{op} = 4r + 2h$$

Primjer:

Izračunaj oplošje, obujam i površinu osnog presjeka valjka ako je površina plašta $18\pi \text{ cm}^2$ i radijus 3 cm .

$$Pl = 18\pi \text{ cm}^2$$

$$r = 3\text{ cm}$$

O=? V=? $P_{OP} = ?$

$$Pl = 2r\pi h$$

$$18\pi = 2 \cdot 3\pi \cdot h$$

$$h = \frac{18\pi}{6\pi}$$

$$h = 3\text{ cm}$$

$$V = B \cdot h$$

$$V = r^2 \pi \cdot h$$

$$V = 3^2 \pi \cdot 3\text{ cm}^3$$

$$V = 27\pi \text{ cm}^3$$

$$O = 2r\pi(r + h)$$

$$O = 2 \cdot 3\pi(3 + 3)\text{ cm}^2$$

$$O = 36\pi \text{ cm}^2$$

$$P_{OP} = 2rh$$

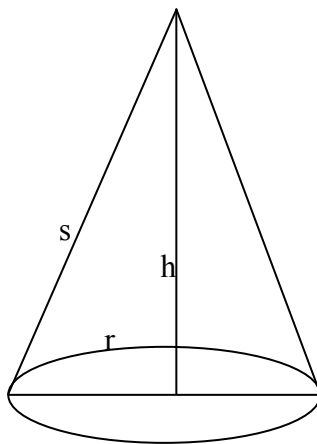
$$P_{OP} = 2 \cdot 3 \cdot 3\text{ cm}^2$$

$$P_{OP} = 18\text{ cm}^2$$

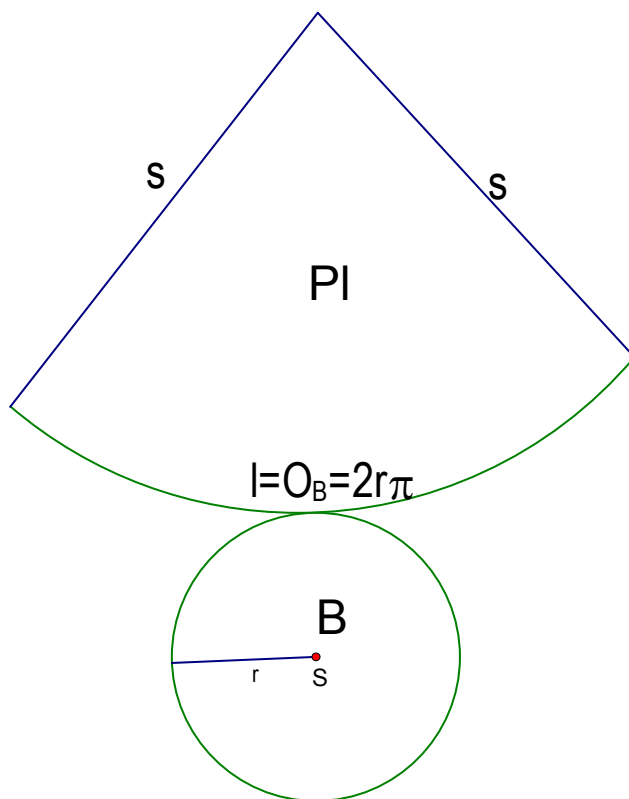
STOŽAC

Stožac je geometrijsko tijelo omeđeno jednim krugom i jednom oblom plohom . Krug kod stošca nazivamo **bazom**, a oblom plohu **plaštom** . Vrh V je vrh stošca. Dužine koje spajaju vrh stošca s točkama kružnice nazivamo **izvodnicama** . **Visina** stošca je dužina povučena iz vrha okomito na ravninu baze stošca .

s – izvodnica stošca
r – polumjer baze
h – visina stošca



MREŽA



$$B = r^2 \pi$$

$$O = B + Pl$$

$$O = r^2 \pi + r \pi s$$

$$Pl = \frac{s \cdot l}{2}$$

$$O = r \pi (r + s)$$

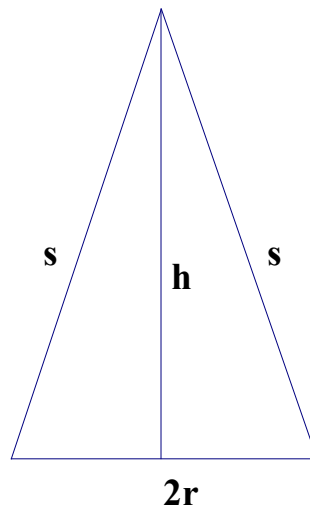
$$Pl = \frac{s \cdot 2r \pi}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} B \cdot h$$

$$Pl = r \pi s$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot r^2 \pi \cdot h$$

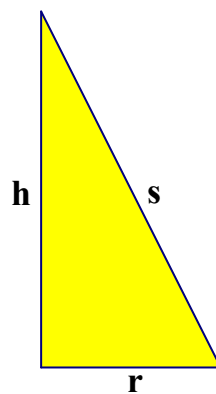
POVRŠINA OSNOG PRESJEKA



$$P_{op} = \frac{2rh}{2}$$

$$P_{op} = rh$$

KARAKTERISTIČAN PRAVOKUTAN TROKUT



$$h^2 = s^2 - r^2$$

$$r^2 = s^2 - h^2$$

$$s^2 = h^2 + r^2$$

Primjer:

Izračunaj oplošje i obujam stošca čija je površina baze $16\pi\text{ cm}^2$, a duljina izvodnice je 5 cm .

$$B = 16\pi\text{ cm}^2$$

$$s = 5\text{ cm}$$

$$\frac{s = 5\text{ cm}}{O, V = ?}$$

$$B = r^2\pi$$

$$h^2 = s^2 - r^2$$

$$O = B + Pl$$

$$V = \frac{1}{3}B \cdot h$$

$$16\pi = r^2\pi$$

$$h^2 = 5^2 - 4^2$$

$$O = 16\pi + r\pi s$$

$$V = \frac{1}{3}16\pi \cdot 3\text{ cm}^3$$

$$r^2 = 16 / \sqrt{\quad}$$

$$h^2 = 25 - 16$$

$$O = (16\pi + 4\pi \cdot 5)\text{ cm}^2$$

$$V = 16\pi\text{ cm}^3$$

$$r = 4\text{ cm}$$

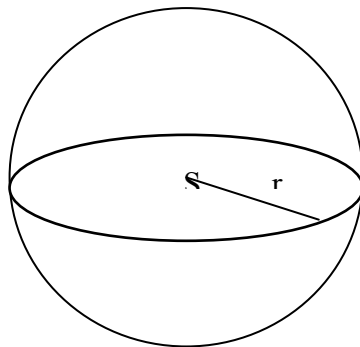
$$h^2 = 9 / \sqrt{\quad}$$

$$O = 36\pi\text{ cm}^2$$

$$h = 3\text{ cm}$$

KUGLA

Kugla je skup točaka prostora čija je udaljenost od zadane točke manja ili jednaka zadanom pozitivnom realnom broju. Skup točaka prostora čija je udaljenost od jedne zadane točke S jednaka zadanom realnom broju čini **kuglinu plohu** ili **sferu**. Točka S je **središte** sfere ili središte kugle. Dužinu koja spaja središte sfere s bilo kojom točkom sfere nazivamo **polumjerom** ili **radijusom** sfere odnosno polumjerom ili radijusom kugle.



Oplošje i obujam kugle polumjera r izračunamo po formulama:

$$O = 4r^2\pi \quad V = \frac{4}{3}r^3\pi$$